Quelques points du programme d'électrocinétique de Sup

Antoine Amarilli

Résumé

Ce document a été conçu en réponse à un sujet de composition de synthèse posé par Thierry Meyer, mon professeur de physique de Sup. J'espère qu'il pourra être utile aux taupins pour leurs révisions.

Table des matières

1 Électrocinétique des régimes quasi-permanents **2**
1.1 Le dipôle . . . 2
1.2 Lois de base de l'électrocinétique . . . 2
1.3 Théorèmes de base de l'électrocinétique . . . 4
1.3.1 Théorèmes de Thévenin et de Norton . . . 4
1.3.2 Première application . . . 4
1.3.3 Seconde application : calcul du courant traversant une diode . . . 5
1.3.4 Troisième application . . . 6
1.4 Structures de base . . . 7
1.4.1 Diviseur de tension . . . 7
1.4.2 Filtre en double T . . . 8
1.4.3 Pont de Wheastone idéal . . . 9
1.4.4 Pont de Wheastone réel . . . 9
1.4.5 Transformation delta-star . . . 10

2 Réponse d'un circuit linéaire à un signal quelconque **13**
2.1 Signaux . . . 13
2.1.1 Définitions générales . . . 13
2.1.2 Signaux de base . . . 13
2.1.3 Décomposition d'un signal . . . 14
2.2 Réponse indicielle d'un circuit linéaire . . . 16
2.2.1 Circuit du premier ordre . . . 16
2.2.2 Circuit du second ordre : circuit LRC série . . . 18
2.2.3 Autres circuits du second ordre . . . 21
2.3 Réponse harmonique d'un circuit linéaire . . . 23
2.3.1 Notation complexe . . . 23
2.3.2 Filtres et diagrammes de Bode . . . 25
2.3.3 Filtres du premier ordre . . . 26
2.3.4 Filtres du second ordre . . . 28

3 L'amplificateur opérationnel **32**
3.1 Définition et propriétés du composant . . . 32
3.2 Structures et montages classiques . . . 33
3.3 Filtrage . . . 35
3.4 Fonctionnement non linéaire . . . 36
3.5 Comparateurs . . . 36

4 Énergie et puissance **42**
4.1 Définitions générales . . . 42
4.2 Puissance en régime sinusoïdal forcé . . . 42
4.3 Adaptation d'impédances . . . 44

1 Électrocinétique des régimes quasi-permanents

1.1 Le dipôle

Définition On appelle dipôle tout composant électronique lié au reste du circuit par deux conducteurs parfaits.

Exemples Le condensateur, la résistance, la diode sont des dipôles.

Conventions d'orientation Les dipôles peuvent être placés en convention dipôle passif (convention récepteur), ou en convention dipôle actif (convention générateur). Voir figure 1.

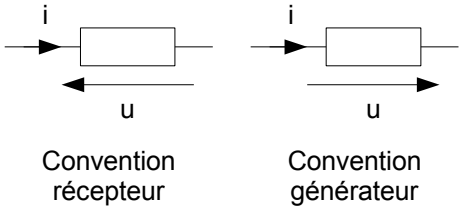

FIGURE 1 – Conventions d'orientation des dipôles

Caractéristique On appelle caractéristique d'un dipôle la relation implicite entre la tension u, le courant i, l'intensité lumineuse Φ et la température T. On suppose cette année que Φ et T sont fixés. On peut donc tracer u en fonction de i (la caractéristique tension-courant du dipôle) ou i en fonction de u (la caractéristique courant-tension du dipôle).

Dipôle linéaire Un dipôle est dit linéaire s'il préserve la linéarité du circuit. Un circuit est dit linéaire si le théorème de superposition s'applique.

Exemples Les résistances, les générateurs de tension, les générateurs de courant, les condensateurs et les bobines sont des dipôles linéaires.

Point de fonctionnement On appelle point de fonctionnement d'un dipôle le point d'intersection (supposé unique) de la caractéristique de ce dipôle et de la droite d'attaque (ou droite de charge). Celle-ci correspond à la caractéristique du générateur équivalent au reste du circuit.

Résistance différentielle Autour d'un point de fonctionnement, on peut remplacer un dipôle par sa résistance différentielle (également appelée "résistance dynamique") afin de déterminer la valeur des petites perturbations de tension ou de courant.

1.2 Lois de base de l'électrocinétique

Définitions On appelle nœud un point d'un circuit électrique lié à au moins trois dipôles. On appelle branche la partie comprise entre deux nœuds. On appelle maille un parcours fermé ne passant qu'une fois par un nœud donné.

Lois de Kirschhoff On a les lois suivantes.

Loi des nœuds Pour un nœud donné, la somme des intensités des courants qui entrent dans ce nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en sortent.

Loi des mailles Pour une maille donnée, la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle de la maille en se plaçant toujours dans la même convention est nulle.

Théorème de Millman Si on a uniquement sur un nœud des générateurs de courants et des résistances, on peut écrire (avec les notations de la figure 2) :

$$V_N = \frac{\sum_k G_k V_k + \sum_k \epsilon_k I_k}{\sum_k G_k} \tag{1}$$

On a l'inductance $G = \frac{1}{R}$, et ϵ_k défini par $\epsilon_k = 1$ si le courant arrive vers le nœud et $\epsilon_k = -1$ si le courant s'écarte du nœud.

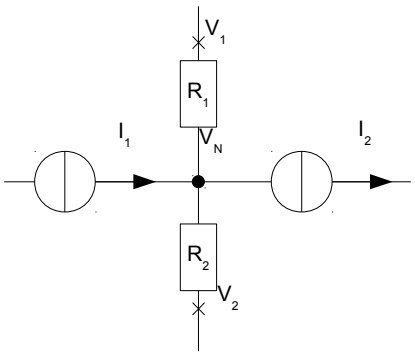

FIGURE 2 – Notations du théorème de Millman

Méthode de résolution d'un circuit par détermination des courants et des tensions Pour résoudre un circuit purement résistif, on effectue d'abord un paramétrage en tension : on choisit la masse, on repère les tensions connues et les tensions inconnues. On applique les éventuelles transformations Thévenin-Norton nécessaires, et on applique le théorème de Millman. On résout le système d'équations obtenu. Une fois tous les potentiels connus, on peut calculer les tensions avec la relation $u = V_1 - V_2$ et les courants avec la relation $i_{1\to 2} = \frac{V_1 - V_2}{R}$ (figure 3).

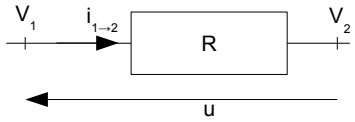

FIGURE 3 – Calcul d'un courant et d'une tension avec paramétrage en tension

Cas concret Considérons le circuit de la figure 4. On cherche à déterminer U.

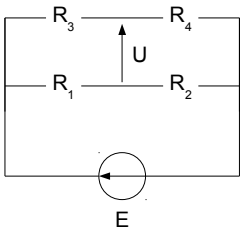

FIGURE 4 – Pont de Wheastone idéal

On effectue un paramétrage en tension (figure 5).

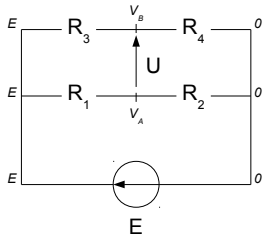

FIGURE 5 – Pont de Wheastone idéal après paramétrage en tension

Par application du théorème de Millman, on a :

$$V_A = \frac{\frac{E}{R_1} + \frac{0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \tag{2}$$

$$V_B = \frac{\frac{E}{R_3} + \frac{0}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{R_4 E}{R_3 + R_4} \tag{3}$$

On calcule alors :

$$U = V_B - V_A = \frac{R_4 E}{R_3 + R_4} - \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = \frac{R_4 R_1 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E \tag{4}$$

1.3 Théorèmes de base de l'électrocinétique

1.3.1 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Théorème de superposition Dans un circuit linéaire purement résistif, un courant ou une tension donnée est égale à la somme des valeurs obtenues pour ce courant ou cette tension produit(e)s par chacune des sources indépendantes seules, les autres sources ayant été passivées.

Transformation Thévenin-Norton La transformation Thévenin-Norton permet de passer d'un générateur de tension (générateur de Thévenin) à un générateur de courant (générateur de Norton), et inversement. Elle est illustrée par la figure 6.

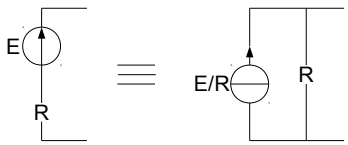

FIGURE 6 – Générateurs équivalents de Thévenin et de Norton

Théorème de Thévenin Le théorème de Thévenin affirme que tout circuit purement résistif peut être ramené à un générateur de tension. Il provient du fait que, comme les dipôles d'un circuit purement résistif ont pour caractéristique une droite, le circuit lui-même a une telle caractéristique.

Théorème de Norton Le théorème de Norton affirme que tout circuit purement résistif peut être ramené à un générateur de courant. Il se déduit du théorème de Thévenin par une transformation Thévenin-Norton.

Utilité des théorèmes de Thévenin et de Norton Les théorèmes de Thévenin et de Norton affirment que l'on peut toujours réduire un circuit purement résistif non trivial à un générateur.

1.3.2 Première application

Considérons le circuit suivant (figure 7).

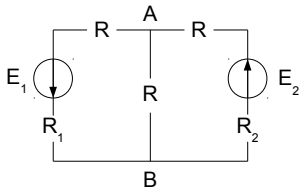

FIGURE 7 – Circuit d'illustration des théorèmes de base de l'électrocinétique

En regroupant les résistances, et en opérant un paramétrage en tension, il vient :

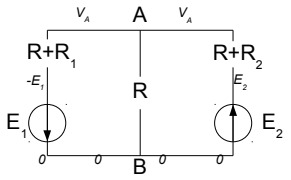

FIGURE 8 – Circuit après regroupement des résistances et paramétrage en tension

Par application du théorème de Millman, on a :

$$V_A = \frac{\frac{-E_1}{R+R_1} + \frac{0}{R} + \frac{E_2}{R+R_2}}{\frac{1}{R+R_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_2}} \tag{5}$$

On calcule alors $i_{AB} = \frac{u_{BA}}{R} = \frac{V(A)-V(B)}{R}$, soit :

$$i_{AB} = \frac{\frac{E_2}{R+R_2} - \frac{E_1}{R+R_1}}{R\left(\frac{1}{R+R_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_2}\right)} = \frac{E_1\left(R+R_2\right) - E_2\left(R+R_1\right)}{R\left(R+R_2\right) + \left(R+R_1\right)\left(R+R_2\right) + R\left(R+R_1\right)} \tag{6}$$

Application numérique : $i_{AB} = \frac{2(5+4)-2(5+6)}{5(5+6)+(5+4)(5+6)+5(5+4)} = -\frac{4}{199} = -20$ mA.

1.3.3 Seconde application : calcul du courant traversant une diode

Considérons le circuit suivant :

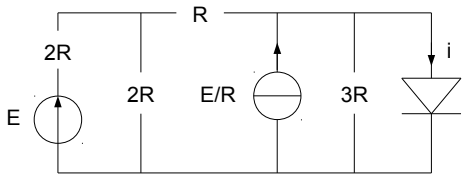

FIGURE 9 – Calcul du courant traversant une diode

On détermine *primus inter pares* l'état de la diode. Pour ce faire, à l'aide de transformations Thévenin-Norton, nous obtenons successivement :

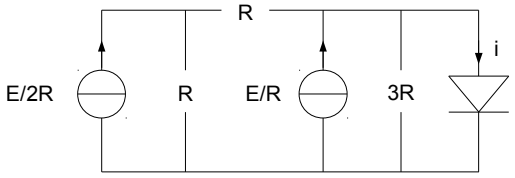

FIGURE 10 – Première transformation

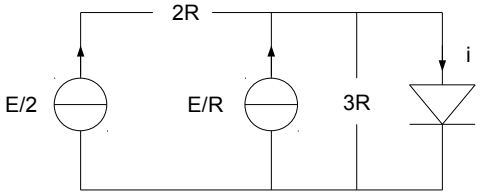

FIGURE 11 – Deuxième transformation

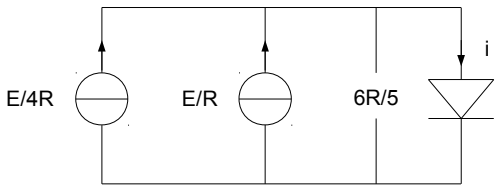

FIGURE 12 – Troisième transformation

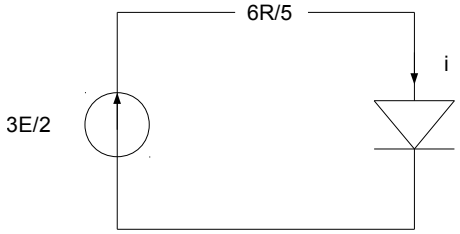

FIGURE 13 – Quatrième transformation

Si $\frac{3}{2}E \geq u_d$, la diode est ON, et on a $i = \frac{\frac{3}{2}E - u_d}{\frac{6}{5}R}$.
Si $\frac{3}{2}E \leq u_d$, la diode est OFF, et on a $i = 0$.

1.3.4 Troisième application

Lemme On montre en théorie du circuit que la constante de temps est la même pour toutes les grandeurs électriques d'un circuit du premier ordre. Pour un circuit comprenant un seul condensateur (premier circuit), elle est de la forme $\tau = R_{eq}C$ avec C la capacité du condensateur et R_{eq} la résistance du générateur de Thévenin ou de Norton équivalent. Pour un circuit comprenant une seule bobine (second circuit), elle est de la forme $\tau = \frac{L}{R}$ avec L l'inductance de la bobine et R_{eq} la résistance du générateur de Thévenin ou de Norton équivalent.

Premier circuit Considérons le circuit de la figure 14.

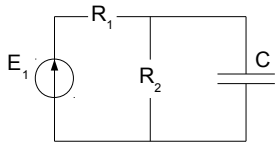

FIGURE 14 – Premier circuit d'application du théorème de Thévenin

Par une transformation Thévenin-Norton suivie d'un regroupement des résistances, nous obtenons le circuit de la figure 15.

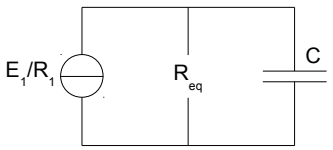

FIGURE 15 – Circuit d'application après simplification

On a :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{7}$$

La constante de temps du circuit vaut donc :

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \tag{8}$$

Second circuit Considérons le circuit de la figure 16

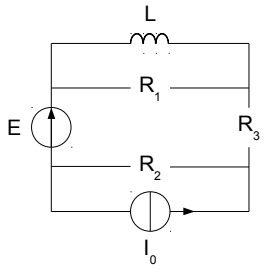

FIGURE 16 – Second circuit d'application du théorème de Thévenin

En opérant une transformation Norton-Thévenin sur le générateur de courant, puis en regroupant les générateurs de tension et les résistances, nous obtenons le circuit de la figure 17.

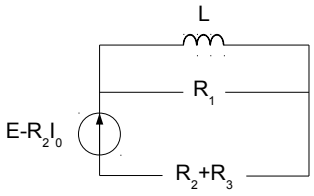

FIGURE 17 – Circuit d'application après simplification

Par une transformation Thévenin-Norton suivie d'un regroupement des résistances en parallèle, nous obtenons le circuit de la figure 18.

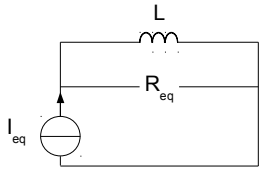

FIGURE 18 – Circuit d'application après simplification

On a :

$$I_{eq} = \frac{E - R_2 I_0}{R_2 + R_3} \tag{9}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{10}$$

La constante de temps du circuit vaut donc :

$$\tau = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 (R_2 + R_3)} L \tag{11}$$

1.4 Structures de base

1.4.1 Diviseur de tension

Quand deux résistances sont en série, le pourcentage de tension aux bornes d'une résistance est égal au pourcentage de résistance (voir figure 19).

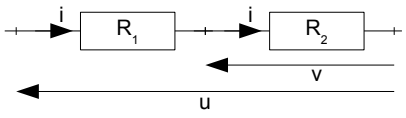

FIGURE 19 – Diviseur de tension

On a donc mathématiquement :

$$\frac{v}{u} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{12}$$

Exemple Considérons le circuit de la figure 20.

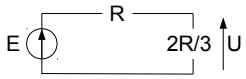

FIGURE 20 – Circuit d'application du diviseur de tension

L'application du diviseur de tension nous donne :

$$\frac{U}{E} = \frac{\frac{2}{3}R}{R + \frac{2}{3}R} \tag{13}$$

On conclut donc :

$$U = \frac{2}{5}E \tag{14}$$

Diviseur de courant Lorsqu'on a n résistances en parallèle, le pourcentage de courant traversant une résistance est égal au pourcentage de conductance (voir figure 21).

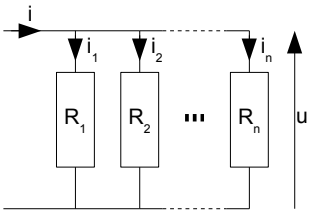

FIGURE 21 – Diviseur de courant

On a donc mathématiquement :

$$\frac{i_k}{i} = \frac{G_k}{\sum_{h=1}^{n} G_h} \tag{15}$$

Exemple Dans le cas de deux résistances R_1 et R_2, on a :

$$\frac{i_1}{i} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{16}$$

1.4.2 Filtre en double T

Considérons le circuit de la figure 22.

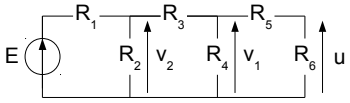

FIGURE 22 – Filtre en double T

Les résistances R_5 et R_6 sont en série. On a donc :

$$\frac{u}{v_1} = \frac{R_6}{R_5 + R_6} \tag{17}$$

Posons $R_{eq_1} = \frac{R_4(R_5+R_6)}{R_4+R_5+R_6}$. On a alors :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_{eq_1}}{R_3 + R_{eq_1}} \tag{18}$$

Posons $R_{eq_2} = \frac{R_2\left(R_3+R_{eq_1}\right)}{R_2+R_3+R_{eq_1}}$. On a alors :

$$\frac{v_2}{E} = \frac{R_{eq_2}}{R_1 + R_{eq_2}} \tag{19}$$

On a :

$$\frac{u}{E} = \frac{u}{v_1} \times \frac{v_1}{v_2} \times \frac{v_2}{E} \tag{20}$$

Soit :

$$u = \frac{R_6}{R_5 + R_6} \times \frac{R_{eq_1}}{R_3 + R_{eq_1}} \times \frac{R_{eq_2}}{R_1 + R_{eq_2}} \times E \tag{21}$$

1.4.3 Pont de Wheastone idéal

Considérons le circuit de la figure 23.

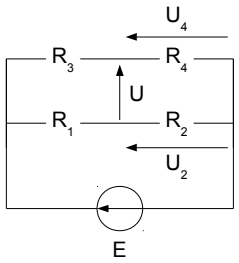

FIGURE 23 – Pont de Wheastone idéal

Les résistances R_1 et R_2 sont en série. On a donc :

$$\frac{U_2}{E} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{22}$$

De même, les résistances R_3 et R_4 sont en série et on a :

$$\frac{U_4}{E} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \tag{23}$$

Par application de la loi des mailles, on a :

$$U = U_4 - U_2 \tag{24}$$

On obtient donc :

$$\frac{U}{E} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4R_1 - R_2R_3}{(R_1 + R_2)(R_3R_4)} \tag{25}$$

On a $U = 0$ si et seulement si :

$$R_1R_4 = R_2R_3 \tag{26}$$

On dit alors que le pont est équilibré.

1.4.4 Pont de Wheastone réel

Considérons le circuit de la figure 24.

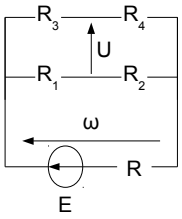

FIGURE 24 – Pont de Wheastone réel

On a d'une manière analogue au cas du pont de Wheastone idéal :

$$\frac{U}{\omega} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \tag{27}$$

Regroupons les résistances. On obtient le circuit de la figure 25, avec $R_{eq} = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$.

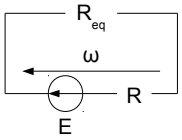

FIGURE 25 – Pont de Wheastone réel après regroupement des résistances

On a alors :

$$\frac{\omega}{E} = \frac{R_{eq}}{R + R_{eq}} \tag{28}$$

On en déduit donc *in fine* :

$$\frac{U}{E} = \frac{\omega}{E} \times \frac{U}{\omega} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \times \frac{R_{eq}}{R + R_{eq}} \tag{29}$$

On a à nouveau $U = 0$ si et seulement si $R_1 R_4 = R_2 R_3$. La condition d'équilibre du pont de Wheastone réel est la même que celle du pont de Wheastone idéal.

1.4.5 Transformation delta-star

La transformation delta-star (également appelée transformation de Kennelly, transformation triangle-étoile ou transformation T-π) permet de transformer un circuit en étoile (figure 26) en circuit en triangle (figure 27).

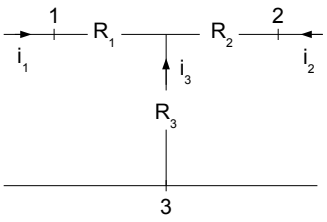

FIGURE 26 – Circuit en étoile

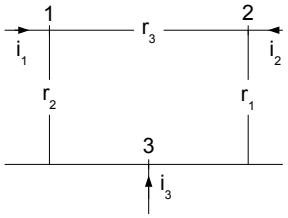

FIGURE 27 – Circuit en triangle

On a :

$$R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \tag{30}$$

$$R_2 = \frac{r_3 r_1}{r_1 + r_2 + r_3} \tag{31}$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3} \tag{32}$$

On a aussi, en notant $G = \frac{1}{R}$ et $g = \frac{1}{r}$:

$$g_1 = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{33}$$

$$g_2 = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{34}$$

$$g_3 = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{35}$$

Exemple On considère le circuit donné en figure 28, où l'on cherche à déterminer I_0.

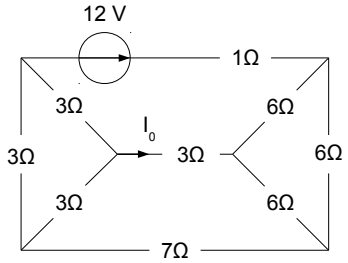

FIGURE 28 – Circuit d'application de la transformation delta-star

On souhaite effectuer une transformation delta-star. On calcule pour le triangle de gauche $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{3\times3}{3+3+3} = 1\Omega$ et pour le triangle de droite $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{6\times6}{6+6+6} = 2\Omega$.
On obtient donc le circuit de la figure 29.

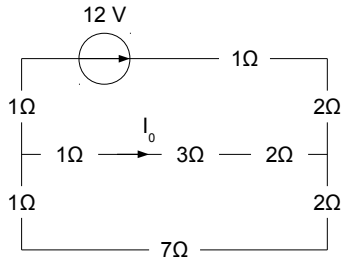

FIGURE 29 – Circuit d'application après transformation delta-star

Après regroupement des résistances, nous obtenons le circuit de la figure 30

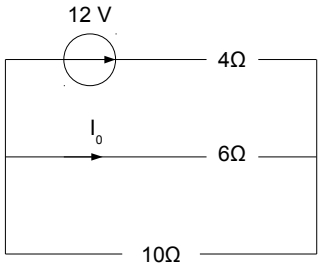

FIGURE 30 – Circuit d'application après regroupement des résistances

Par une transformation Thévenin-Norton, en regroupant les résistances on obtient le circuit de la figure 31.

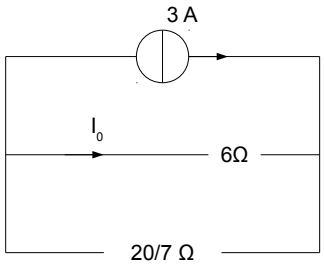

FIGURE 31 – Circuit d'application après transformation Thévenin-Norton

Par un pont diviseur de courant, on en déduit :

$$\frac{I_0}{I} = -\frac{\frac{20}{7}}{6+\frac{20}{7}} = -\frac{10}{31} \tag{36}$$

Soit *in fine* :

$$I_0 = -\frac{30}{31}A \tag{37}$$

2 Réponse d'un circuit linéaire à un signal quelconque

2.1 Signaux

2.1.1 Définitions générales

Sources On distingue deux types de sources : celles dites analogiques, qui sont continues par morceaux, et celles dites numériques, qui génèrent des bits (ou digits).

Traitement du signal Le schéma de base du traitement du signal est donné en figure 32.

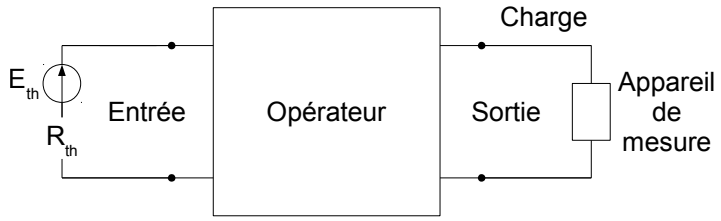

FIGURE 32 – Traitement du signal

Un opérateur peut accomplir diverses opérations : amplification, dérivation, intégration, tronquage, numérisation, etc.

Linéarité On dit qu'un opérateur est linéaire si pour toutes entrées e_1, e_2 donnant respectivement en sortie s_1, s_2 et pour tout couple de nombres réels (λ, μ), l'entrée $\lambda e_1 + \mu e_2$ donne en sortie $\lambda s_1 + \mu s_2$.

2.1.2 Signaux de base

Échelon de Heaviside Cet échelon est défini par la fonction :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{38}$$

La représentation graphique de δ_n est donnée en figure 33.

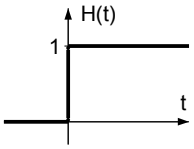

FIGURE 33 – Représentation graphique d'un échelon de Heaviside

La réponse d'un circuit à un échelon est sa réponse indicielle.

Impulsion de Dirac Une impulsion de Dirac est un signal électrique très bref et très intense, comme un éclair.

On définit la fonction :

$$\delta_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } |t| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{1}{2n} \end{cases} \tag{39}$$

L'impulsion de Dirac est définie par la fonction :

$$\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(t) \tag{40}$$

Sa représentation graphique est donnée en figure 34.

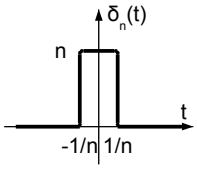

FIGURE 34 – Représentation graphique d'une impulsion de Dirac

La fonction δ_n vérifie pour tout n :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t)\,dt = \frac{2}{2n}n = 1 \tag{41}$$

La réponse d'un circuit à une impulsion de Dirac est sa réponse impulsionnelle.

Signaux harmoniques La représentation fonctionnelle d'un signal harmonique est :

$$f(t) = F_{max}\cos(\omega t + \phi) \tag{42}$$

On a :
– F_{max} l'amplitude (strictement positive) ;
– ω la pulsation en rad.s^{-1} ;
– ϕ la phase à l'origine ;
– $\omega t + \phi$ la phase.

Un signal harmonique peut également être représenté de manière spectrale (figure 35) ou complexe (figure 36).

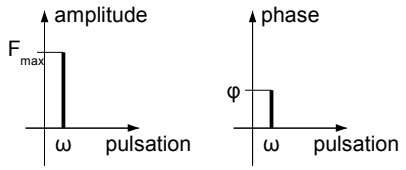

FIGURE 35 – Représentation spectrale

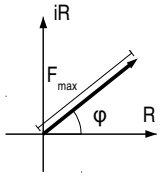

FIGURE 36 – Représentation complexe

2.1.3 Décomposition d'un signal

Théorème de Dirichlet Soit f une fonction T-périodique non pathologique (présentant notamment un nombre fini de discontinuités). On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On définit :

$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{43}$$

On peut alors écrire f sous la forme :

$$f(t) = \langle f\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\omega t) \tag{44}$$

Ou encore :

$$f(t) = \langle f\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega t - \phi_n) \tag{45}$$

Si f est paire, alors on a $b_n = 0$ pour tout n. Si f est impaire, alors on a $a_n = 0$ pour tout n.
On a :

$$a_k = \langle\cos(k\omega t)\,|f(t)\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\,f(t)\,dt \tag{46}$$

Et :

$$b_k = \langle\sin(k\omega t)\,|f(t)\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T \sin(k\omega t)\,f(t)\,dt \tag{47}$$

Théorème de Fourier Pour un circuit linéaire, la réponse à un signal périodique est, d'après le théorème de superposition, la somme des réponses individuelles de chaque harmonique (ω, 2ω, 3ω, etc.).

Application On considère un signal alternatif impair en créneau $E(t)$ d'amplitude E, représenté en figure 37.

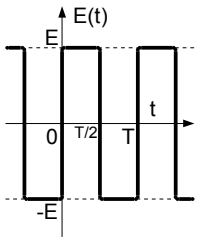

FIGURE 37 – Signal alternatif impair en créneau

Comme le signal est périodique, en posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on a d'après le théorème de Dirichlet :

$$E(t) = \langle E(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \tag{48}$$

On a alors :

$$a_n = \langle \cos(n\omega t) \,|\, f(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t)\, E(t)\, dt \tag{49}$$

En scindant l'intégrale en deux, nous obtenons :

$$a_n = \frac{2}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) E dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) E dt \right) \tag{50}$$

On obtient donc :

$$a_n = \frac{2}{T} \frac{E}{\frac{2\pi}{T} n} \left(\left[\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) E \right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) E \right]_{\frac{T}{2}}^{T} \right) \tag{51}$$

Soit, en simplifiant :

$$a_n = \frac{E}{\pi n} \left(\sin(n\pi) - \sin(2n\pi) - \sin(2n0) \right) = 0 \tag{52}$$

De même, on a :

$$b_n = \langle \sin(n\omega t) \,|\, f(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t)\, E(t)\, dt \tag{53}$$

En scindant l'intégrale en deux, nous obtenons :

$$b_n = \frac{2}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) E dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) E dt \right) \tag{54}$$

On obtient donc :

$$b_n = \frac{2}{T} \frac{E}{\frac{2\pi}{T} n} \left(\left[-\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) E \right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[-\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) E \right]_{\frac{T}{2}}^{T} \right) \tag{55}$$

Soit, en simplifiant :

$$b_n = \frac{E}{\pi n} \left(\cos(\pi 2n) + 1 - 2\cos(\pi n) \right) = \frac{2E}{\pi n} \left(1 - (-1)^n \right) \tag{56}$$

On a donc $a_n = 0$, et $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4E}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

De manière triviale, on a :

$$\langle E(t) \rangle = 0 \tag{57}$$

La représentation spectrale du signal est donnée en figure 38.

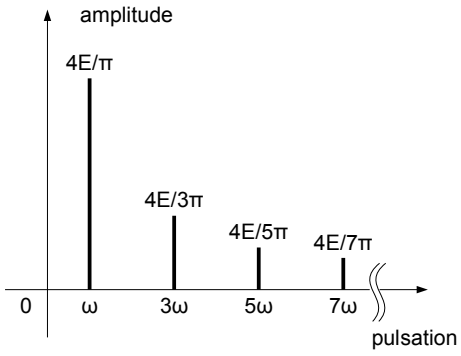

FIGURE 38 – Représentation spectrale du signal alternatif impair en créneau

2.2 Réponse indicielle d'un circuit linéaire

2.2.1 Circuit du premier ordre

Circuit RC série Le circuit RC série est présenté en figure 39.

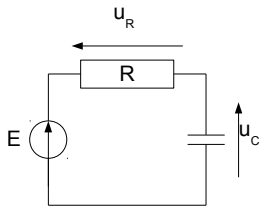

FIGURE 39 – Circuit RC série

Par application de la loi des mailles, on obtient :

$$u_R + u_C - E = 0 \tag{58}$$

On a $u_R = Ri$ selon la loi d'Ohm, soit :

$$Ri + u_C = E \tag{59}$$

Ou, comme $i = C\frac{du_C}{dt}$:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \tag{60}$$

Soit :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC} \tag{61}$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre. On a $u_C(\infty) = E$ et $\tau = RC$, la solution est donc :

$$u_C(t) = \left(u_C\left(0^+\right) - u_C(\infty)\right) e^{\frac{-t}{\tau}} + u_C(\infty) \tag{62}$$

Si le condensateur est initialement déchargé, on a $u_C(0^+) = 0$, soit :

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \tag{63}$$

Par application de la formule $i = C\frac{du_C}{dt}$, ou par utilisation de la loi des mailles et application de la loi d'Ohm pour la résistance, on obtient par ailleurs :

$$i(t) = \frac{Ee^{\frac{-t}{\tau}}}{R} \tag{64}$$

Constante de temps La constante de temps du circuit est $\tau = RC$

Relation de continuité À la fin d'un régime transitoire (en t_0^-), le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Comme le condensateur assure la continuité de la tension, il est équivalent à t_0^+ à un générateur de tension égale à la tension à ses bornes en t_0^-.

Justification de la relation de continuité L'énergie est une fonction continue du temps, en effet, une discontinuité en un point correspondrait à un gain d'énergie Δ_E non nul en un temps nul, c'est-à-dire à une puissance infinie.

De ce fait, selon la formule donnant l'énergie emmagasinée par un condensateur, on a :

$$\frac{1}{2}Cu\left(t_0^+\right)^2 = \frac{1}{2}Cu\left(t_0^-\right)^2 \tag{65}$$

En simplifiant, on obtient :

$$u\left(t_0^+\right) = u\left(t_0^-\right) \tag{66}$$

Circuit RL série Le circuit RL série est présenté en figure 40.

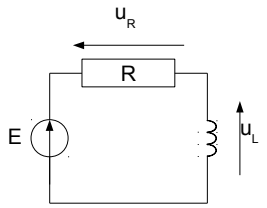

FIGURE 40 – Circuit RL série

Par application de la loi des mailles, on obtient :

$$u_R + u_L - E = 0 \tag{67}$$

On a $u_R = RI$ selon la loi d'Ohm, soit :

$$Ri + u_L = E \tag{68}$$

Ou, comme $u_L = L\frac{di}{dt}$:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E \tag{69}$$

Soit :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \tag{70}$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre. On a $i\left(\infty\right) = \frac{E}{R}$ et $\tau = \frac{L}{R}$, la solution est donc :

$$i\left(t\right) = \left(i\left(0^+\right) - i\left(\infty\right)\right)e^{\frac{-t}{\tau}} + i\left(\infty\right) \tag{71}$$

Si l'on suppose que $i\left(0^+\right) = 0$, on a :

$$i\left(t\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \tag{72}$$

Par application de la formule $u = L\frac{di}{dt}$, ou par utilisation de la loi des mailles et application de la loi d'Ohm pour la résistance, on obtient par ailleurs :

$$u_L\left(t\right) = Ee^{\frac{-t}{\tau}} \tag{73}$$

Constante de temps La constante de temps du circuit est $\tau = \frac{L}{R}$

Relation de continuité À la fin d'un régime transitoire (en t_0^-), la bobine est équivalente à un interrupteur fermé. Comme la bobine assure la continuité du courant, elle est équivalente à t_0^+ à un générateur de courant égale au courant la traversant en t_0^-.

Justification de la relation de continuité Comme précédemment, puisque l'énergie est une fonction continue du temps, on a selon la formule donnant l'énergie emmagasinée par une bobine :

$$\frac{1}{2}Li\left(t_0^+\right)^2 = \frac{1}{2}Li\left(t_0^-\right)^2 \tag{74}$$

En simplifiant, on obtient :

$$i\left(t_0^+\right) = i\left(t_0^-\right) \tag{75}$$

Ordre d'un circuit L'ordre maximum d'un circuit est égal au nombre de bobines et de condensateurs.

2.2.2 Circuit du second ordre : circuit LRC série

On considère le circuit LRC série de la figure 41. À $t = 0$, on ferme K.

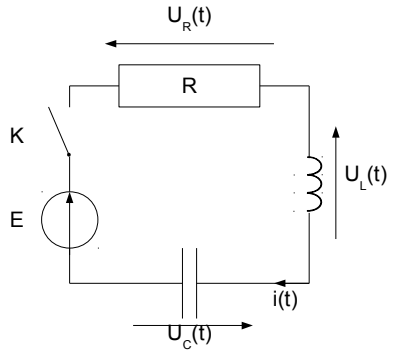

FIGURE 41 – Circuit LRC série

Recherche des conditions initiales Supposons le condensateur et la bobine initialement déchargés (c'est-à-dire $U_C\left(0^-\right) = 0$ et $I_L\left(0^-\right) = 0$). Au début du régime transitoire, en appliquant les relations de continuité, on obtient le circuit de la figure 42.

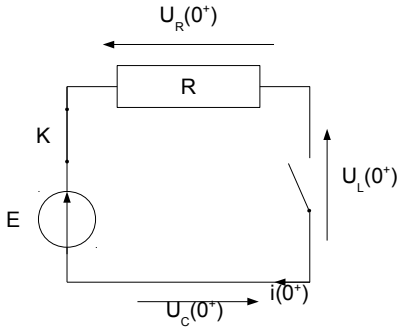

FIGURE 42 – Circuit LRC série à $t = 0^+$

On détermine immédiatement $i\left(0^+\right) = 0$, $U_C\left(0^+\right) = 0$ et, par application de la loi des mailles :

$$E = U_C + U_R + U_L \tag{76}$$

On en déduit :

$$U_L\left(0^+\right) = E \tag{77}$$

On a :

$$i = C\frac{dU_C}{dt} \tag{78}$$

Cela permet d'obtenir :

$$\dot{U_C}\left(0^+\right) = 0 \tag{79}$$

On a également :

$$U_L = L\frac{di}{dt} \tag{80}$$

On en déduit :

$$\dot{i}\left(0^+\right) = \frac{E}{L} \tag{81}$$

En dérivant l'équation 76, on obtient $i = C\left(\frac{dE}{dt} - \frac{dU_R}{dt} - \frac{dU_L}{dt}\right)$ soit $i = -C\left(R\frac{di}{dt} + \frac{dU_L}{dt}\right)$ et :

$$\dot{U_L}\left(0^+\right) = -\frac{RE}{L} \tag{82}$$

Recherche du régime continu (comportement en $+\infty$) À la fin d'un régime transitoire, la tension et le courant se sont stabilisés. Leur dérivée tend donc vers 0. L'application des relations $i = C\frac{dU_C}{dt}$ et $U_L = L\frac{di}{dt}$ permet d'affirmer que le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et que la bobine est équivalente à un fil.

À la fin du régime transitoire, on obtient le circuit de la figure 43

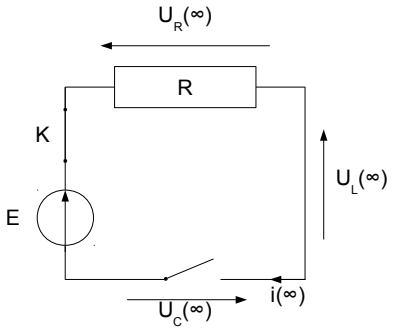

FIGURE 43 – Circuit LRC série à $t = +\infty$

On obtient immédiatement pour la grandeur étudiée : $U_L(\infty) = 0$.

Étude de U_L On s'intéresse à la tension aux bornes de la bobine.

Équation différentielle En dérivant une première fois l'équation 76, on obtient :

$$\frac{i}{C} + \frac{R}{L}U_L + \dot{U_L} = 0 \tag{83}$$

En la dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\ddot{U_L} + \frac{R}{L}\dot{U_L} + \frac{1}{LC}U_L = 0 \tag{84}$$

On cherche à mettre l'équation 84 sous la forme canonique :

$$\ddot{U_L} + 2m\omega_0\dot{U_L} + \omega_0^2 U_L = 0 \tag{85}$$

On identifie :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{86}$$

$$m = \frac{R\sqrt{LC}}{2L} \tag{87}$$

On pose la résistance critique R_C telle que $m = 1$, soit :

$$R_C\sqrt{LC} = 2L \tag{88}$$

On en déduit :

$$R_C = \frac{2\sqrt{LC}}{C} \tag{89}$$

On pose également :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2} \tag{90}$$

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} \tag{91}$$

Régime pseudo-périodique Si $R < R_C$ (soit $0 < m < 1$), les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$U_L = e^{-m\omega_0 t} \left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\right) \tag{92}$$

On calcule alors :

$$U_L(0) = \lambda \tag{93}$$

$$\dot{U_L}(0) = -m\omega_0 \lambda + \mu\omega \tag{94}$$

Par application des conditions initiales (équations 77 et 82), on calcule :

$$\lambda = E \tag{95}$$

$$\mu = \left(\frac{m\omega_0 - \frac{R}{L}}{\omega}\right) E \tag{96}$$

Soit *in fine* :

$$U_L = E e^{m\omega_0 t} \left(\cos(\omega t) + \frac{-m\omega_0 - \frac{R}{L}}{\omega} \sin(\omega t)\right) \tag{97}$$

Régime critique Si $R = R_C$ (soit $m = 1$), les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$U_L = e^{-\omega_0 t} \left(\lambda + \mu t\right) \tag{98}$$

On calcule alors :

$$U_L(0) = \lambda \tag{99}$$

$$\dot{U_L}(0) = -\omega_0 \lambda + \mu \tag{100}$$

Par application des conditions initiales (équations 77 et 82), on obtient :

$$\lambda = E \tag{101}$$

$$\mu = \left(\omega_0 - \frac{R}{L}\right) E \tag{102}$$

Soit *in fine* :

$$U_L = E e^{-m\omega_0 t} \left(1 + \left(\omega_0 - \frac{R}{L}\right) t\right) \tag{103}$$

Régime apériodique Si $R > R_C$ (soit $m > 1$), les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$U_L = e^{-m\omega_0 t} \left(\lambda \cosh(\Omega t) + \mu \sinh(\Omega t)\right) \tag{104}$$

On calcule alors :

$$U_L(0) = \lambda \tag{105}$$

$$\dot{U_L}(0) = -m\omega_0 \lambda + \mu\Omega \tag{106}$$

Par application des conditions initiales (équations 77 et 82), on calcule, comme pour le régime pseudo-périodique :

$$\lambda = E \tag{107}$$

$$\mu = \left(\frac{m\omega_0 - \frac{R}{L}}{\Omega} \right) E \tag{108}$$

Soit *in fine* :

$$U_L = Ee^{m\omega_0 t} \left(\cosh(\Omega t) + \frac{-m\omega_0 - \frac{R}{L}}{\Omega} \sinh(\Omega t) \right) \tag{109}$$

2.2.3 Autres circuits du second ordre

On considère le circuit de la figure 44

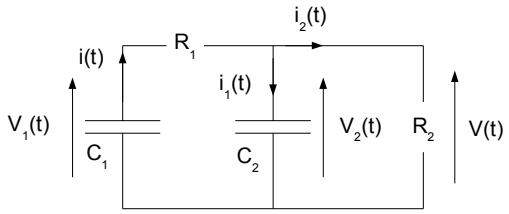

FIGURE 44 – Circuit du second ordre

Ordre du circuit Le circuit comporte deux condensateurs, il est donc du second ordre.

Équation différentielle Recherchons à présent l'équation différentielle vérifiée par $V(t)$.

Travail par élimination Par application de la loi des mailles, on obtient les deux équations :

$$V + R_1 i = V_1 \tag{110}$$

$$V = V_2 \tag{111}$$

Par application de la loi des nœuds, on obtient par ailleurs :

$$i = i_1 + i_2 \tag{112}$$

Enfin, la loi d'Ohm nous donne :

$$V = R_2 i_2 \tag{113}$$

En dérivant les équations 110 et 111, nous obtenons :

$$\dot{V} + R_1 \dot{i} = -\frac{i}{C_1} \tag{114}$$

$$\dot{V} = \frac{i_1}{C_2} \tag{115}$$

De l'équation 115, nous déduisons :

$$i_1 = C_2 \dot{V} \tag{116}$$

De l'équation 113, nous obtenons également :

$$i_2 = \frac{V}{R_2} \tag{117}$$

En injectant les résultats des équations 112, 116 et 117 dans l'équation 114, nous obtenons :

$$\dot{V} + R_1 C_2 \ddot{V} + \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \dot{V} = -\frac{C_2 \dot{V}}{C_1} - \frac{V}{R_2 C_1} \tag{118}$$

Soit *in fine* :

$$(R_1 C_2) \ddot{V} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \right) \dot{V} + \frac{1}{R_2 C_1} V = 0 \tag{119}$$

Transmutation complexe En notation symbolique, on a :

$$i = \frac{-V}{R_1 + \frac{1}{pC_1}} \tag{120}$$

$$i_1 = pVC_2 \tag{121}$$

$$i_2 = \frac{V}{R_2} \tag{122}$$

Par application de la loi des nœuds (équation 112), on obtient :

$$-\frac{V}{R_1 + \frac{1}{pC_1}} = pVC_2 + \frac{V}{R_2} \tag{123}$$

Soit, en simplifiant :

$$pR_1C_2V + \left(\frac{C_2}{C_1} + \frac{R_1}{R_2} + 1\right)V + \frac{V}{R_2C_1p} = 0 \tag{124}$$

En multipliant par p, et en remplaçant cet opérateur par $\frac{d}{dt}$, nous obtenons l'équation différentielle :

$$R_1C_2\ddot{V} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1\right)\dot{V} + \frac{1}{R_2C_1}V = 0 \tag{125}$$

Résolution Par application des hypothèses de l'énoncé, on a $C_1 = C_2 = C$ et $R_2 = 2R_1 = 2R$. On suppose le condensateur C_1 initialement chargé sous une tension V_0, et le condensateur C_2 initialement déchargé.

La condition initiale $V_2\left(0^+\right) = 0$ correspond trivialement à :

$$V\left(0^+\right) = 0 \tag{126}$$

Par application de la loi des mailles, on obtient :

$$V_2 = V_1 - Ri \tag{127}$$

En 0^+, cette équation nous donne :

$$i\left(0^+\right) = \frac{V_0}{R} \tag{128}$$

De la relation $V = 2Ri_2$, nous déduisons :

$$i_2\left(0^+\right) = \frac{V\left(0^+\right)}{2R} = 0 \tag{129}$$

L'équation 115 nous permet alors d'écrire :

$$\dot{V}\left(0^+\right) = \frac{i_1\left(0^+\right)}{C} = \frac{i\left(0^+\right) - i_2\left(0^+\right)}{C} = \frac{V_0}{RC} \tag{130}$$

L'équation différentielle considérée est :

$$\ddot{V} + \frac{5}{2RC}\dot{V} + \frac{1}{2\left(RC\right)^2}V = 0 \tag{131}$$

On identifie :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC} \tag{132}$$

$$m = \frac{5}{4}\sqrt{2} \tag{133}$$

On a $m > 1$, il s'agit donc d'un régime apériodique. On pose :

$$\omega = \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \tag{134}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$V = e^{\frac{-t}{RC}}\left(\lambda\cosh\left(\omega t\right) + \mu\sinh\left(\omega t\right)\right) \tag{135}$$

On calcule alors :

$$V(0) = \lambda \tag{136}$$

$$\dot{V}(0) = -m\omega_0\lambda + \mu\omega \tag{137}$$

Par application des conditions initiales (équations 126 et 130), on calcule :

$$\lambda = 0 \tag{138}$$

$$\mu = \frac{V_0}{RC\omega} = \frac{\sqrt{2}V_0}{\sqrt{m^2-1}} \tag{139}$$

Soit *in fine* :

$$U_L = Ee^{\frac{-5RCt}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}V_0}{\sqrt{m^2-1}}\sinh(\omega t)\right) \tag{140}$$

Méthode de résolution d'un circuit par élimination La résolution d'un circuit par élimination permet d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par un circuit linéaire à plusieurs mailles.

Dans un premier temps, on écrit la loi des mailles dans toutes les mailles où se trouve la grandeur cherchée. On écrit également la loi des nœuds lorsque cela est possible, et les relations fondamentales des condensateurs et des bobines lorsque cela est nécessaire. On dérive les égalités lorsqu'elles comprennent une tension inconnue aux bornes d'un condensateur (ceci afin de la remplacer par une intensité divisée par la capacité du condensateur).

On cherche ensuite à exprimer chacune des grandeurs inconnues en fonction de la grandeur cherchée. Ceci étant fait, on choisit une égalité dans laquelle on injecte l'expression en fonction de la grandeur cherchée des grandeurs précédemment inconnues. L'égalité ne comprend alors plus que la grandeur étudiée, ses dérivées, et des constantes : il s'agit d'une équation différentielle que l'on peut chercher à résoudre.

Dans de nombreux cas, la transmutation complexe permet d'obtenir l'équation différentielle plus rapidement et d'en trouver facilement une solution particulière.

2.3 Réponse harmonique d'un circuit linéaire

2.3.1 Notation complexe

Définition La notation complexe consiste à associer à une fonction à valeurs réelles de la forme $y(t) = Y_{max}\cos(\omega t + \phi)$ une fonction à valeurs complexes de la forme $\underline{y}(t) = Y_{max}e^{j\phi}e^{j\omega t}$. Une fonction numérique complexe de la forme $\underline{y}(t) = Y_{max}e^{j\phi}e^{j\omega t}$ peut réciproquement être ramenée à la fonction réelle $y(t) = |\underline{Y}|\cos(\omega t + \arg(\underline{Y}))$, avec $\underline{Y} = Y_{max}e^{j\phi}$.

De même, on associe à $y(t) = Y_{max}\sin(\omega t + \phi)$ la fonction complexe $\underline{y}(t) = -jY_{max}e^{j\phi}e^{j\omega t}$.

Propriétés La transmutation complexe est linéaire : pour tous λ, μ réels, si on a $y_1 \to \underline{y_1}$ et $y_2 \longrightarrow \underline{y_2}$, alors on a $\lambda y_1 + \mu y_2 \longrightarrow \lambda\underline{y_1} + \mu\underline{y_2}$. Par ailleurs, si $y \longrightarrow \underline{y}$ alors $\underline{\frac{dy}{dt}} \longrightarrow j\omega\underline{y} = p\underline{y} = \frac{d\underline{y}}{dt}$.

Intérêt Comme dériver revient à multiplier par $j\omega$, une équation différentielle linéaire devient après transmutation une équation algébrique. D'un point de vue électrique, cela signifie que des composants électroniques linéaires sont, une fois transmutés, assimilables à des résistances, ce qui simplifie grandement les calculs.

Exemples On a :

$$F_0\cos(\omega t) + F_1\sin(2\omega t) \longrightarrow F_0e^{j\omega t} - jF_1e^{2j\omega t} \tag{141}$$

$$F_0\cos^2(\omega t) = F_0\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) \longrightarrow \frac{F_0}{2}\left(1+e^{2j\omega t}\right) \tag{142}$$

$$F_0\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow -jF_0e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j\omega t} \tag{143}$$

Équations différentielles On s'intéresse à l'équation :

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 E_0 \sin(\omega t) \tag{144}$$

On passe dans le domaine symbolique en effectuant la transmutation des deux membres de l'équation. On obtient alors, par linéarité :

$$(j\omega)^2 \underline{y} + 2\lambda (j\omega) \underline{y} + \omega_0^2 \underline{y} = -j\omega_0^2 E_0 e^{j\omega t} \tag{145}$$

En factorisant et en regroupant, nous obtenons :

$$\underline{y} = \frac{-j\omega_0^2 E_0}{(j\omega)^2 + 2\lambda (j\omega) + \omega_0^2} e^{j\omega t} \tag{146}$$

Posons $\underline{Y} = \frac{-j\omega_0^2 E_0}{(j\omega)^2 + 2\lambda(j\omega) + \omega_0^2}$. Nous obtenons :

$$|\underline{Y}| = \frac{|-j\omega_0^2 E_0|}{|(j\omega)^2 + 2\lambda (j\omega) + \omega_0^2|} = \frac{-\omega_0^2 E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \tag{147}$$

$$\arg(\underline{Y}) = \arg\left(-j\omega_0^2 E_0\right) - \arg\left((j\omega)^2 + 2\lambda (j\omega) + \omega_0^2\right) = \frac{\frac{-\pi}{2}}{\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}} \tag{148}$$

Une solution particulière de l'équation différentielle 144 est :

$$y(t) = |\underline{Y}| \cos(\omega t + \arg(\underline{Y})) = \frac{-\omega_0^2 E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \frac{-\pi}{\frac{\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}\right) \tag{149}$$

Régime sinusoïdal forcé On appelle régime sinusoïdal forcé la solution particulière de l'équation différentielle d'un circuit linéaire à coefficients constants du premier ou du second ordre pour une excitation sinusoïdale. Si le circuit est stable, la solution particulière est très proche de la solution générale de l'équation différentielle quand $t \gg \tau$ ou $t \gg \tau_a$.

Transmutation des composants électroniques linéaires Les condensateurs vérifient $i = C\frac{du}{dt}$, ce qui correspond après transmutation à $\underline{i} = jC\omega\underline{u}$, soit $\underline{u} = \frac{\underline{i}}{jC\omega}$. Les bobines vérifient $u = L\frac{di}{dt}$, soit après transmutation $\underline{u} = jL\omega\underline{i}$. Ces composants se comportent donc comme des résistances dont la valeur (complexe) est nommée impédance.

Impédances et association d'impédances Le passage en notation complexe pour un circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé permet de se ramener à un circuit purement résistif ou l'on a affaire à des impédances. Pour une impédance $\underline{z}$, on note $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{z}}$ l'admittance. Les impédances s'ajoutent en série, et les admittances s'ajoutent en parallèle.

Application On considère le circuit donné en figure 45, en posant $V_1(t) = E_0 \sin(\omega t)$ et $V_2(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

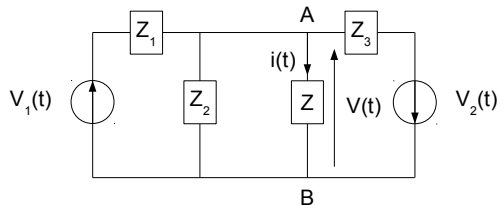

FIGURE 45 – Application de la notation complexe

Après transmutation complexe des générateurs, nous obtenons :

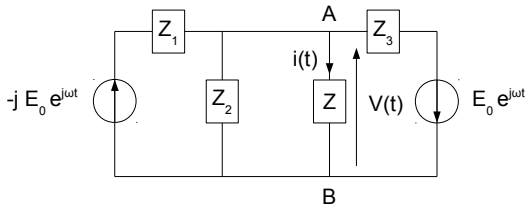

FIGURE 46 – Circuit après transmutation des générateurs

On applique le théorème de superposition.

Générateur V_1 On passive le générateur V_2.
On a par application de la loi d'Ohm :

$$i_a = \frac{V_a}{Z} \tag{150}$$

Or, par application du pont diviseur de tension :

$$\frac{V_a}{V_1} = \frac{1}{1 + Z_1\left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z}\right)} \tag{151}$$

Il vient donc :

$$i_a = \frac{V_1}{Z\left(1 + Z_1\left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z}\right)\right)} \tag{152}$$

Générateur V_2 On passive le générateur V_1.
On a par application de la loi d'Ohm :

$$i_b = \frac{V_b}{Z} \tag{153}$$

Or, par application du pont diviseur de tension :

$$\frac{V_b}{V_2} = -\frac{1}{1 + Z_3\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z}\right)} \tag{154}$$

Il vient donc :

$$i_b = \frac{V_2}{Z\left(1 + Z_3\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z}\right)\right)} \tag{155}$$

Superposition Par application du théorème de superposition, on a :

$$i = i_a + i_b \tag{156}$$

On a donc :

$$i = \frac{V_1}{Z\left(1 + Z_1\left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z}\right)\right)} + \frac{V_2}{Z\left(1 + Z_3\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z}\right)\right)} \tag{157}$$

2.3.2 Filtres et diagrammes de Bode

Fonction de transfert Pour un système linéaire, si l'on a en notation complexe une entrée sinusoïdale de la forme $\underline{y_e} = Y_{e,max}e^{j\phi_e}e^{j\omega t}$ et une sortie sinusoïdale de même période de la forme $\underline{y_s} = Y_{s,max}e^{j\phi_s}e^{j\omega t}$, on pose le gain $G = \frac{\underline{y_s}}{\underline{y_e}}$ et le déphasage $\psi = \phi_s - \phi_e$ et la fonction de transfert $\underline{\mathscr{H}} = \frac{\underline{y_s}}{\underline{y_e}} = Ge^{j\psi}$. On a ainsi $\arg\left(\underline{\mathscr{H}}\right) = \psi$ et $\left|\underline{\mathscr{H}}\right| = G$.

Diagramme de Bode On pose $G_{dB} = 20\log_{10}(G)$. On appelle diagramme de Bode la représentation de G_{dB} en fonction de $X = \log_{10}(\omega)$, et la représentation de ψ en fonction de $X = \log_{10}(\omega)$.

Exemples On peut considérer comme exemples les diagrammes de Bode :

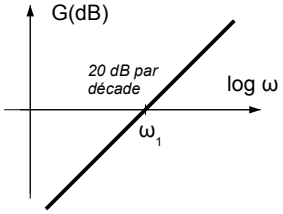

FIGURE 47 – Diagramme de Bode de la fonction $j\frac{\omega}{\omega_1}$

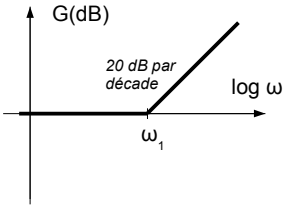

FIGURE 48 – Diagramme de Bode de la fonction $1+j\frac{\omega}{\omega_1}$

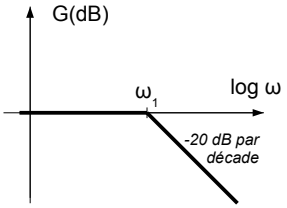

FIGURE 49 – Diagramme de Bode de la fonction $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}$

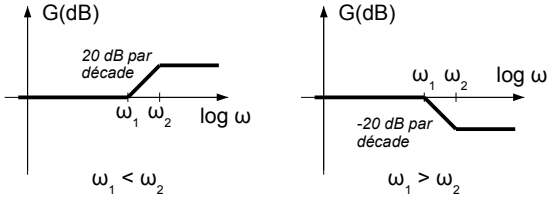

FIGURE 50 – Diagramme de Bode de la fonction $\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}$

Ordre d'un filtre L'ordre d'un filtre est le degré du polynôme au dénominateur de sa fonction de transfert sous forme normalisée : $\underline{\mathscr{H}} = \frac{a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots}{1+b_1p+b_2p^2+\ldots}$.

Étude du comportement en hautes et basses fréquences Pour étudier le comportement d'un filtre pour les hautes fréquences et les basses fréquences, on remplace les bobines et les condensateurs par leur modèle équivalent pour ces fréquences. Pour un condensateur, comme $z_C = \frac{1}{jC\omega}$, son modèle équivalent pour $\omega \to 0$ est un interrupteur ouvert (car $|z_C| \to \infty$), et son modèle équivalent pour $\omega \to \infty$ est un fil (car $|z_C| \to 0$). Réciproquement, pour une bobine, comme $z_L = dL\omega$, le modèle équivalent pour $\omega \to 0$ est un fil (car $|z_L| \to 0$) et pour $\omega \to \infty$ est un interrupteur ouvert (car $|z_L| \to \infty$).

2.3.3 Filtres du premier ordre

Réponse harmonique à un filtre passe-bas du premier ordre Considérons le filtre passe-bas du premier ordre donné en figure 51.

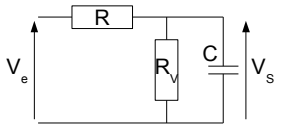

FIGURE 51 – Filtre passe-bas du premier ordre

Étude du comportement hautes et basses fréquences Pour les basses fréquences, le circuit correspond à la figure 52.

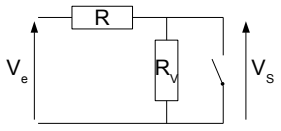

FIGURE 52 – Filtre passe-bas du premier ordre, approximation pour les basses fréquences

On a $\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{R_V}{R+R_V} < 1$ donc le filtre atténue les basses fréquences.

Pour les hautes fréquences, le circuit correspond à la figure 53.

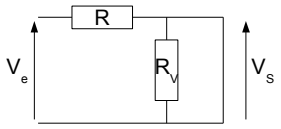

FIGURE 53 – Filtre passe-bas du premier ordre, approximation pour les hautes fréquences

On a $\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = 0$ donc le filtre coupe les hautes fréquences.
Le système étudié est donc un filtre passe-bas.

Fonction de transfert On note $Z_1 = R$, et $Y_2 = \frac{1}{R_V} + jC\omega$. On a la fonction de transfert :

$$\underline{\mathscr{H}} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\frac{1}{Y_2}}{Z_1 + \frac{1}{Y_2}} = \frac{1}{1 + Z_1 Y_2} = \frac{1}{\frac{R_V + R}{R_V} + j\omega RC} = \frac{\frac{R_V}{R+R_V}}{1 + jC\omega\frac{RR_V}{R+R_V}} = \frac{\frac{R_V}{R+R_V}}{1 + j\frac{\omega}{\frac{R+R_V}{CRR_V}}} \tag{158}$$

Forme normalisée Pour un filtre passe-bas du premier ordre, la forme normalisée est :

$$\underline{\mathscr{H}}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \tag{159}$$

Réponse harmonique à un filtre passe-haut du premier ordre Considérons le filtre passe-haut du premier ordre donné en figure 54.

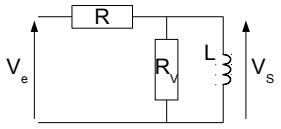

FIGURE 54 – Filtre passe-haut du premier ordre

Étude du comportement hautes et basses fréquences Pour les basses fréquences, le circuit correspond à la figure 55.

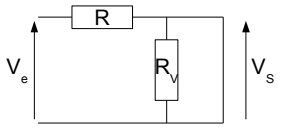

FIGURE 55 – Filtre passe-haut du premier ordre, approximation pour les basses fréquences

On a $\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = 0$ donc le filtre coupe les basses fréquences.
Pour les hautes fréquences, le circuit correspond à la figure 56.

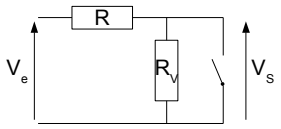

FIGURE 56 – Filtre passe-haut du premier ordre, approximation pour les hautes fréquences

On a $\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{R_V}{R+R_V} < 1$ donc le filtre atténue les hautes fréquences.
Le système étudié est donc un filtre passe-haut.

Fonction de transfert On note $Z_1 = R$, et $Y_2 = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{jL\omega}$. On a la fonction de transfert :

$$\underline{\mathscr{H}} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\frac{1}{Y_2}}{Z_1 + \frac{1}{Y_2}} = \frac{1}{1 + Z_1 Y_2} = \frac{1}{\frac{R_V + R}{R_V} + \frac{R}{j\omega L}} = \frac{\frac{j\omega L}{R}}{1 + j\omega L \frac{R_V + R}{R R_V}} = \frac{\frac{R_V}{R+R_V} j \frac{\omega}{\frac{R R_V}{L R + L R_V}}}{1 + j \frac{\omega}{\frac{R R_V}{L R + L R_V}}} \tag{160}$$

Forme normalisée Pour un filtre passe-haut du premier ordre, la forme normalisée est :

$$\underline{\mathscr{H}}(j\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \tag{161}$$

Celle-ci se retrouve à partir de la forme normalisée d'un filtre passe-bas du premier ordre, en remplaçant $j\frac{\omega}{\omega_c}$ par $\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}}$.

2.3.4 Filtres du second ordre

Réponse harmonique d'un circuit LRC série Considérons le circuit LRC série donné en figure 57.

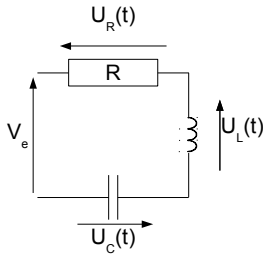

FIGURE 57 – Circuit LRC série

Réponse aux bornes de R Le filtre coupe les basses fréquences et les basses fréquences, il s'agit donc d'un filtre passe-bande.

Par application du pont diviseur de tension, on a :

$$\frac{U_R}{V_E} = \frac{R}{R + Lj\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{C}{R\omega}\right)} \tag{162}$$

Réponse aux bornes de L Le filtre coupe les basses fréquences et atténue les hautes fréquences, il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

Par application du pont diviseur de tension, on a :

$$\frac{U_L}{V_E} = \frac{Lj\omega}{R + Lj\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{RC(j\omega)^2}{1 + RLj\omega + LC(j\omega)^2} \tag{163}$$

Réponse aux bornes de C Le filtre atténue les basses fréquences et coupe les hautes fréquences, il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

Par application du pont diviseur de tension, on a :

$$\frac{U_C}{V_E} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + Lj\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + RCj\omega + LC(j\omega)^2} \tag{164}$$

Formes normalisées

Filtre passe-bas du second ordre La forme normalisée d'un tel filtre est :

$$\underline{\mathscr{H}}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2j\alpha\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{165}$$

On rappelle que H_0 n'est pas égal au gain maximum, et que ω_0 n'est pas la pulsation de coupure.

Filtre passe-haut du second ordre La forme normalisée d'un tel filtre est :

$$\underline{\mathscr{H}}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{2\alpha}{j\frac{\omega}{\omega_0}} + \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{166}$$

Celle-ci se retrouve à partir de la forme normalisée d'un filtre passe-bas du premier ordre, en remplaçant $j\frac{\omega}{\omega_c}$ par $\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}}$.

Filtre passe-bande du second ordre La forme normalisée d'un tel filtre est :

$$\underline{\mathscr{H}}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\alpha\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{167}$$

La valeur absolue de H_0 correspond au gain maximal G_{max}, α est égal au facteur de qualité Q, et ω_0 correspond à la pulsation du maximum ω_{max}.

Réponse harmonique d'un circuit de Wien général On considère le circuit de Wien (figure 58).

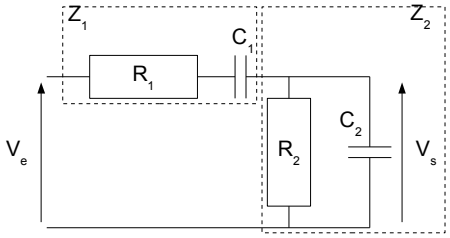

FIGURE 58 – Circuit de Wien général

On a $\frac{v_s}{v_e=0}$ en hautes fréquences et en basses fréquences, il s'agit donc d'un filtre passe-bande.
On a :

$$\underline{\mathscr{H}_{wien}}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{\frac{1}{y_2}}{z_1 + \frac{1}{z_2}} = \frac{1}{1 + z_1 y_2} = \frac{1}{1 + \left(R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}\right)\left(\frac{1}{R_2} + jC_2\omega\right)} = \frac{1}{1 + jR_1C_2\omega + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + \frac{1}{jR_2C_1\omega}} \tag{168}$$

En mettant ce résultat sous forme normalisée, il vient :

$$\underline{\mathscr{H}_{wien}}(j\omega) = \frac{\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}}{1 + j\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}\left(R_1C_2\omega - \frac{1}{R_2C_1\omega}\right)} \tag{169}$$

Déterminons $\alpha = Q$, H_0 et ω_0 par identification avec la forme normalisée de l'équation 167. On a de manière immédiate :

$$H_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}} \tag{170}$$

Pour identifier Q et ω_0, on remarque que ω_0 est la valeur de ω qui annule la partie imaginaire du dénominateur pour la forme normalisée de l'équation 167. La valeur ω_0 vérifie donc :

$$R_1C_2\omega_0 = \frac{1}{R_2C_1\omega_0} \tag{171}$$

Or, l'équation 169 se récrit :

$$\underline{\mathscr{H}_{wien}}(j\omega) = \frac{\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}}{1 + j\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}\left(R_1C_2\frac{\omega_0\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{R_2C_1\omega\omega_0}\right)} \tag{172}$$

Cela est d'après l'équation 171 équivalent à :

$$\underline{\mathscr{H}_{wien}}(j\omega) = \frac{\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}}{1+j\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}(R_1C_2\omega_0)\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{173}$$

De l'équation 171, on détermine immédiatement :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}} \tag{174}$$

Nous obtenons par ailleurs de l'équation 173 :

$$Q = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}(R_1C_2\omega_0) = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}\left(\frac{R_1C_2}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}\right) = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}} \tag{175}$$

La réponse en sortie du circuit de Wien général est donc :

$$\underline{\mathscr{H}_{wien}}(j\omega) = \frac{\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}}{1+j\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}}{\omega}\right)} \tag{176}$$

Réponse du filtre réjecteur On considère le circuit de la figure 59.

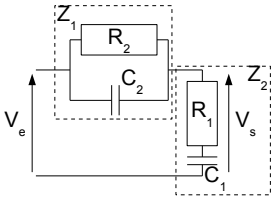

FIGURE 59 – Filtre réjecteur

Le filtre laisse passer les hautes fréquences et les basses fréquences, c'est donc un filtre coupe-bande.
On a par application du pont diviseur de tension :

$$\frac{V_S}{V_e} = \frac{z_1}{z_1+z_2} \tag{177}$$

Or, on remarque que :

$$H_0 - \frac{V_S}{V_e} = 1 - \frac{V_S}{V_e} = \frac{z_1+z_2-z_1}{z_1+z_2} = \underline{\mathscr{H}_{wien}}(j\omega) \tag{178}$$

On a donc :

$$\underline{\mathscr{H}_{rej}}(j\omega) = 1 - \underline{\mathscr{H}_{wien}}(j\omega) = \frac{1+j\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}}{\omega}\right)-\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}}{1+j\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}}\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}}{\omega}\right)} \tag{179}$$

Filtre L série, RC parallèle On considère le filtre donné en figure 60.

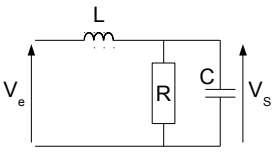

FIGURE 60 – Filtre L série, RC parallèle

Comportements hautes et basses fréquences Le filtre atténue les basses fréquences et coupe les hautes fréquences, il s'agit donc d'un passe-bas du second ordre.

Fonction de transfert On pose $z_1 = jL\omega$ et $y_2 = \frac{1}{R+jC\omega}$. On a alors :

$$\underline{\mathscr{H}}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{\frac{1}{y_2}}{z_1 + \frac{1}{y_2}} = \frac{1}{1 + z_1 y_2} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R} + LC(j\omega)^2} \tag{180}$$

Déterminons H_0, α et ω_0 par identification avec la forme normalisée de l'équation 165. On a de manière immédiate :

$$H_0 = 1 \tag{181}$$

On a également :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{182}$$

Enfin, comme $\frac{2\alpha}{\omega_0} = \frac{L}{R}$, on a :

$$\alpha = \frac{L\omega_0}{2R} = \frac{L}{2R\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{LC}}{2RC} \tag{183}$$

La réponse en sortie de ce filtre est donc :

$$\underline{\mathscr{H}}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\frac{\sqrt{LC}}{2RC}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{LC}}}\right)^2} \tag{184}$$

3 L'amplificateur opérationnel

3.1 Définition et propriétés du composant

Symbolisme L'amplificateur opérationnel a deux représentations conventionnelles (figures 61 et 62).

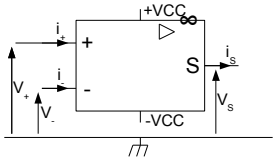

FIGURE 61 – Représentation européenne de l'amplificateur opérationnel

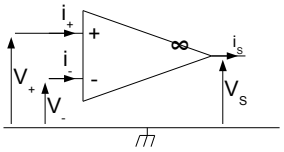

FIGURE 62 – Représentation américaine de l'amplificateur opérationnel

Le symbole ∞, facultatif, indique que l'on a affaire à un amplificateur opérationnel idéal.

Caractéristiques

Alimentation L'amplificateur opérationnel est un composant alimenté à une tension $+V_{CC}$.

Courants d'entrée et de sortie Les courants d'entrée i_+ et i_- sont faibles (de l'ordre de 10 nanoampères) et sont considérés comme nuls dans le cas d'un amplificateur opérationnel idéal. En revanche, le courant de sortie i_S est non nul.

Différentiel On note $\epsilon = v_+ - v_-$ le différentiel de l'amplificateur opérationnel.

Caractéristique La caractéristique de l'amplificateur opérationnel (tension de sortie en fonction du différentiel de tension) est donnée en figure 63.

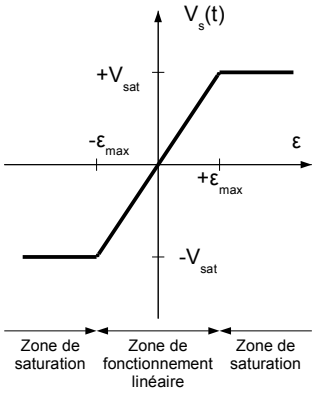

FIGURE 63 – Caractéristique de l'amplificateur opérationnel

On y relève une zone de fonctionnement linéaire (pour $|\epsilon| < \epsilon_{max}$) et deux zones de saturation (pour $|\epsilon| > \epsilon_{max}$).

Fonctionnement en zone linéaire On définit $A_0 = 10^5$ (soit $20\log(A_0) = 100$ dB) le gain en boucle ouverte d'un amplificateur opérationnel réel (on considère que $A_0 = \infty$ pour un amplificateur opérationnel idéal), on a alors $v_S = A_0\epsilon$.

Fonctionnement en zone saturée On a alors $V_S = V_{sat}$, avec $V_{sat} \approx V_{CC}$.

Règle du potentiel commun virtuel Comme on a en fonctionnement linéaire $v_S = A_0\epsilon$, et que v_S est fini mais $A_0 = \infty$ pour un amplificateur opérationnel idéal, on a nécessairement $\epsilon \to 0$, d'où $v_+ = v_-$ pour un amplificateur opérationnel idéal en fonctionnement linéaire.

3.2 Structures et montages classiques

Masse virtuelle Considérons le montage donné en figure 66.

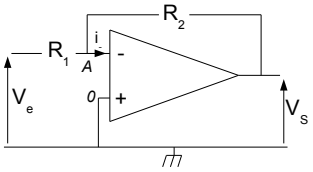

FIGURE 64 – Structure dite "à masse virtuelle"

Le potentiel du point A est égal à 0 car le potentiel des pattes + et - d'un amplificateur opérationnel idéal fonctionnant en linéaire est le même. Par application du théorème de Millman au point A, il vient :

$$0 = \frac{\frac{V_e}{R_1} + \frac{V_S}{R_2} - i_-}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{185}$$

Le courant i_- est nul car l'amplificateur opérationnel est supposé idéal. On déduit de l'équation 185 :

$$\frac{v_S}{v_e} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{186}$$

Ampli inverseur Considérons le montage de la figure 64 où l'on suppose $R_2 > R_1$. De l'équation 186, on déduit que le montage augmente l'amplitude du signal d'entrée en inversant son signe. Il s'agit donc d'un montage inverseur.

Ampli non inverseur Le montage non inverseur est donné en figure 65.

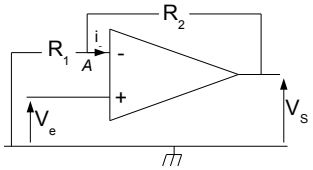

FIGURE 65 – Ampli non inverseur

Addition Considérons le montage donné en figure 66.

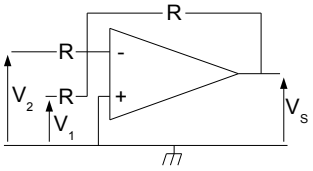

FIGURE 66 – Montage additionneur

Par application du théorème de Millman au point A, il vient :

$$0 = \frac{\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + \frac{v_S}{R} - i}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = v_1 + v_2 + v_s \tag{187}$$

On a donc $v_S = -(v_1 + v_2)$. La tension de sortie est, au signe près, la somme des tensions d'entrée.

Soustraction Le montage soustracteur est donné en figure 67.

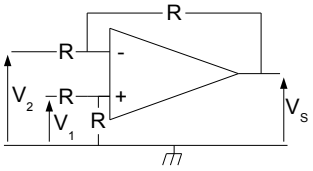

FIGURE 67 – Montage soustracteur

Intégration Considérons le montage donné en figure 68.

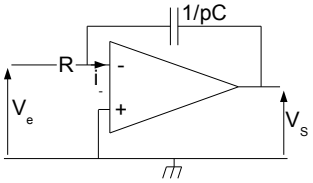

FIGURE 68 – Montage intégrateur

Par application du théorème de Millman sur la patte -, on obtient :

$$0 = \frac{\frac{V_e}{R} + v_S pC}{\frac{1}{R} + pC} \tag{188}$$

Soit, après simplification, en posant $\tau = RC$:

$$v_e = -\tau \dot{v_S} \tag{189}$$

En intégrant, on obtient :

$$V_S(t) = V_S\left(0^-\right) - \frac{1}{\tau}\int_0^t V_e(s)\,ds \tag{190}$$

Si l'on suppose le condensateur initialement déchargé, on a $V_S\left(0^-\right) = 0$ et :

$$V_S(t) = -\frac{1}{\tau}\int_0^t V_e(s)\,ds \tag{191}$$

En réalité, ce montage ne fonctionne pas si l'on considère que le courant de la patte - n'est pas exactement nul. Si l'on prend en compte le courant i_- en appliquant le théorème de Millman, l'équation 188 se récrit :

$$0 = \frac{\frac{V_e}{R} + v_S pC + i_-}{\frac{1}{R} + pC} \tag{192}$$

L'équation 189 se récrit alors :

$$v_e = -\tau \dot{v_S} + Ri_- \tag{193}$$

En intégrant, il vient alors, en lieu et place de l'équation 190 (si l'on suppose le condensateur initialement déchargé) :

$$V_S(t) = -\frac{1}{\tau}\int_0^t V_e(s)\,ds + \frac{1}{\tau}\int_0^t Ri_-\,du = -\frac{1}{\tau}\int_0^t V_e(s)\,ds + \frac{Ri_-t}{\tau} \tag{194}$$

À partir d'une certaine date, aussi faible que soit le courant i_-, l'amplificateur opérationnel finira par saturer.

Suiveur Le montage suiveur est donné en figure 69.

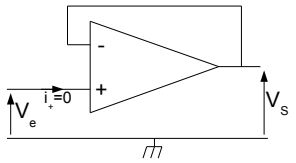

FIGURE 69 – Montage suiveur

On a trivialement $V_S = V_E$ et $i_+ = 0$. L'amplificateur opérationnel répercute les tensions sans faire débiter de courant. S'il est intercalé entre des filtres, on pourra alors multiplier les fonctions de transfert.

Dérivation Le montage dérivateur est donné en figure 70.

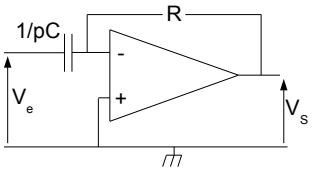

FIGURE 70 – Montage dérivateur

3.3 Filtrage

Structure Sallen-Key Une structure d'exemple est donnée en figure 71.

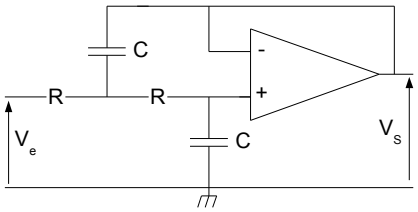

FIGURE 71 – Structure Sallen-Key

Structure Notch Une structure d'exemple est donnée en figure 72.

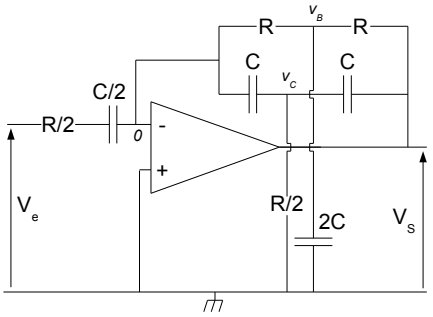

FIGURE 72 – Structure Notch

Structure Rauch Une structure d'exemple est donnée en figure 73.

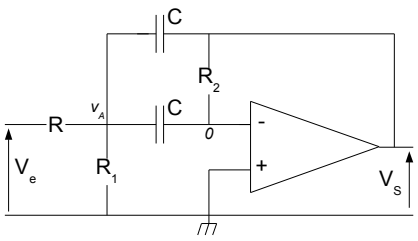

FIGURE 73 – Structure Rauch

3.4 Fonctionnement non linéaire

Règle de la pichenette La règle de la pichenette permet de déterminer ce qui se passe lorsqu'un amplificateur opérationnel est bouclé sur la patte + ou sur la patte -.

Bouclage sur la patte + Considérons un amplificateur opérationnel idéal bouclé sur la patte + (figure 74).

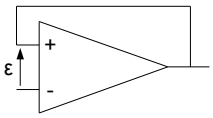

FIGURE 74 – Amplificateur opérationnel bouclé sur la patte +

À l'apparition d'un différentiel de tension ϵ supposé positif, on a $v_S = v_{sat}$ d'où $\epsilon = v_{sat}$. On dit qu'ϵ "explose" à v_{sat}. Cela correspond à une rétroaction positive.

Bouclage sur la patte - Considérons un amplificateur opérationnel idéal bouclé sur la patte - (figure 75).

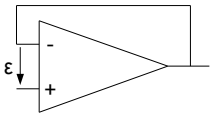

FIGURE 75 – Amplificateur opérationnel bouclé sur la patte -

À l'apparition d'un différentiel de tension ϵ supposé positif, on a $v_S = v_{sat}$ d'où $\epsilon = -v_{sat}$. On a alors $v_S = -v_{sat}$ d'où $\epsilon = v_{sat}$, et ainsi de suite, ϵ finissant par se stabiliser à 0 qui constitue la seule situation stable. Cela correspond à une rétroaction négative.

Autres bouclages Dans le cas d'un amplificateur opérationnel bouclé sur les deux pattes, le texte fournira parfois des indications. Sinon, il est possible de supposer un fonctionnement linéaire, de chercher l'équation différentielle vérifiée par le système et de vérifier sa stabilité à partir du signe de ses coefficients pour confirmer ou infirmer notre hypothèse.

3.5 Comparateurs

Comparateur simple Considérons le montage donné en figure 76.

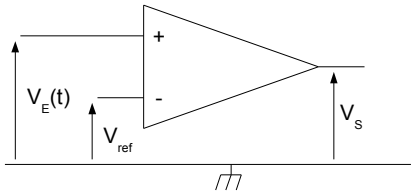

FIGURE 76 – Comparateur simple

En fonctionnement saturé, on a $V_S = +V_{sat}$ si $V_E(t) > V_{ref}$ (soit $\epsilon > 0$), et $V_s = -V_{sat}$ si $V_E(t) < V_{ref}$ (soit $\epsilon < 0$).

Comparateur à hystérésis Considérons le montage donné en figure 77.

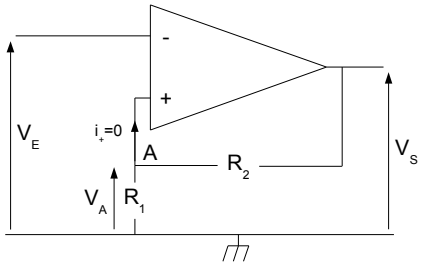

FIGURE 77 – Comparateur à hystérésis

Comme $i_+ = 0$, les résistances R_1 et R_2 sont en série, et par application du pont diviseur de tension (ou du théorème de Millman), on a, en posant $a = \frac{R_1}{R_1+R_2}$:

$$V_+ = V_A = aV_S \tag{195}$$

Comme l'amplificateur opérationnel est bouclé sur la patte +, il est en rétroaction positive et fonctionne donc en saturé. On ne peut donc écrire $V_+ = V_-$. On a en revanche $|V_S| = V_{sat}$, et $\epsilon = V_+ - V_- = aV_S - V_E(t)$.

On suppose dans un premier temps $V_S = +V_{sat}$. On a alors $\epsilon = aV_{sat} - V_E(t)$. Lorsque $V_E(t)$ atteint aV_{sat}, ϵ devient négatif, et V_S bascule à $-V_{sat}$: on a alors $\epsilon = -aV_{sat} - V_E(t)$. Lorsque $V_E(t)$ atteint $-aV_{sat}$, ϵ redevient positif, et on a à nouveau $V_S = +V_{sat}$.

On pose V_H égal à la valeur de V_E telle que $\epsilon = 0$ et $V_S = +V_{sat}$, et V_B égal à la valeur de V_S telle que $\epsilon = 0$ et $V_S = -V_{sat}$.

Dans le cas du comparateur à hystérésis simple, on a $V_H = +aV_{sat}$ et $V_B = -aVsat$.

Le symbole conventionnellement utilisé pour représenter le comparateur à hystérésis (ou trigger) est donné en figure 78.

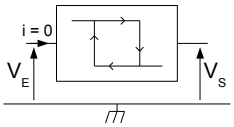

FIGURE 78 – Symbole du trigger

Oscillateur à relaxation et générateurs de triangles Considérons le montage de la figure 79 qui associe un condensateur et un comparateur à hystéréris.

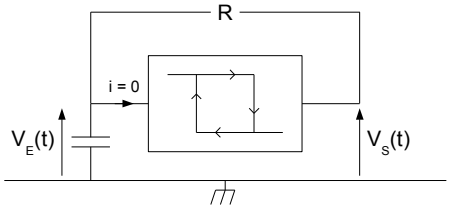

FIGURE 79 – Oscillateur à relaxation

On suppose $V_E(0^+) = 0$ (le condensateur est initialement déchargé), et $V_S = +V_{sat}$. Le condensateur tend vers la tension qu'on lui applique, et V_E croît vers $+V_{sat}$ de manière exponentielle. Cependant, une fois qu'elle a atteint V_H, la tension V_S bascule à $-V_{sat}$. La tension V_E décroît alors jusqu'à atteindre V_B, où V_S repasse à $+V_{sat}$. Le processus se répète alors de manière périodique.

On pose $\tau = RC$.

Sur un front montant, on obtient l'équation différentielle :

$$\tau \dot{V_E} + V_E = +V_{sat} \tag{196}$$

On pose l'origine des temps telle que $V_E(0^+) = V_B$. La solution de cette équation est :

$$V_E(t) = (V_B - V_{sat})\, e^{\frac{-t}{\tau}} + V_{sat} \tag{197}$$

En particulier, en notant T_H le temps où V_H est atteint (et donc la durée d'un front montant), on a :

$$V_H = (V_B - V_{sat})\, e^{\frac{-T_H}{\tau}} + V_{sat} \tag{198}$$

On obtient donc :

$$T_H = \tau \ln \left| \frac{V_B - V_{sat}}{V_H - V_{sat}} \right| \tag{199}$$

De manière analogue, sur un front descendant, l'équation différentielle est :

$$\tau \dot{V_E} + V_E = -V_{sat} \tag{200}$$

Avec un changement de l'origine des temps, on a la solution :

$$V_E(t) = (V_H + V_{sat})\, e^{\frac{-t}{\tau}} - V_{sat} \tag{201}$$

On obtient donc, en notant T_B la durée d'un front descendant :

$$T_B = \tau \ln \left| \frac{V_H + V_{sat}}{V_B + V_{sat}} \right| \tag{202}$$

On pose la période :

$$T = T_B + T_H \tag{203}$$

On pose le rapport cyclique :

$$\eta = \frac{T_H}{T_B} \tag{204}$$

Dans le cas d'un comparateur à hystérésis simple, on a $V_H = -V_B$ d'où $T_H = T_B$. On calcule donc :

$$T = 2\tau \ln \left| \frac{V_{sat} - V_B}{V_B + V_{sat}} \right| \tag{205}$$

$$\eta = 1 \tag{206}$$

Considérons à présent le montage où la résistance de charge a été remplacée par un montage potentiométrique à deux diodes idéales (figure 80).

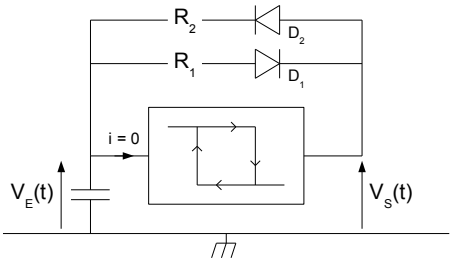

FIGURE 80 – Oscillateur à relaxation avec montage potentiométrique

Sur un front montant, la sortie est positive donc la diode D_1 est passante et la diode D_2 non passante. Le montage est équivalent à celui considéré précédemment, avec $\tau = \tau_1 = R_1 C$.

De même, sur un front descendant, la sortie est négative donc la diode D_2 est passante et la diode D_1 non passante. Le montage est équivalent à celui considéré précédemment, avec $\tau = \tau_2 = R_2 C$.

On a alors :

$$T = (\tau_1 + \tau_2) \ln \left| \frac{V_{sat} - V_B}{V_B + V_{sat}} \right| \tag{207}$$

$$\eta = \frac{\tau_1}{\tau_2} \tag{208}$$

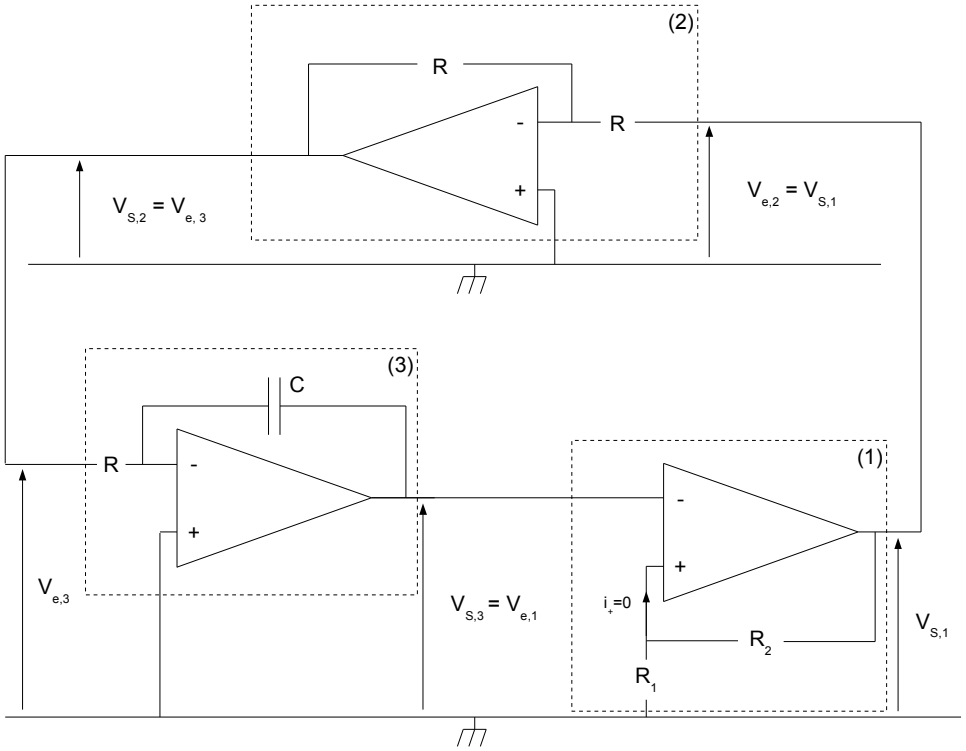

FIGURE 81 – Générateur de triangles

On reconnaît en (1) un trigger, en (2) un montage inverseur et en (3) un montage intégrateur.

On a donc, selon les équations 186 et 191, en posant $\tau = RC$ et en supposant le condensateur initialement déchargé :

$$V_{S,2} = -V_{S,1} \tag{209}$$

$$V_{S,3} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t V_{S,2}(s)\,ds \tag{210}$$

Soit, en combinant les deux relations :

$$V_{e,1} = \frac{1}{\tau}\int_0^t V_{S,1}(s)\,ds \tag{211}$$

On considère que l'on a initialement $V_{S,1} = +V_{sat}$. On a alors (en calculant l'intégrale) $V_{e,1}(t) = \frac{V_{sat}}{\tau}t$, jusqu'à ce que $V_{e,1}$ atteigne V_H. À ce moment, $V_{s,1}$ passe à $-V_{sat}$ et $V_{e,1}$ à $-\frac{V_{sat}}{\tau}t$. Ceci se maintient jusqu'à ce que $V_{e,1}$ atteigne V_B : $V_{S,1}$ repassera alors à $-V_{sat}$, et le phénomène se poursuivra. La sortie est affine par morceaux, en triangle.

Comme précédemment, en notant T_H la durée d'un front montant, on a :

$$V_H - V_B = \frac{1}{\tau}T_H V_{sat} \tag{212}$$

On en déduit :

$$T_H = \frac{\tau\,(V_H - V_B)}{V_{sat}} \tag{213}$$

De même, en notant T_B la durée d'un front descendant, on a :

$$V_B - V_H = -\frac{1}{\tau}T_B V_{sat} \tag{214}$$

On obtient donc :

$$T_B = -\frac{\tau\,(V_B - V_H)}{V_{sat}} = T_H \tag{215}$$

On a donc la période :

$$T = T_H + T_B = \frac{2\tau\,(V_H - V_B)}{V_{sat}} \tag{216}$$

Le rapport cyclique vaut 1 car $T_H = T_B$.

Considérons à présent le montage où la résistance de charge a été remplacée par un montage potentiométrique à deux diodes idéales (figure 82).

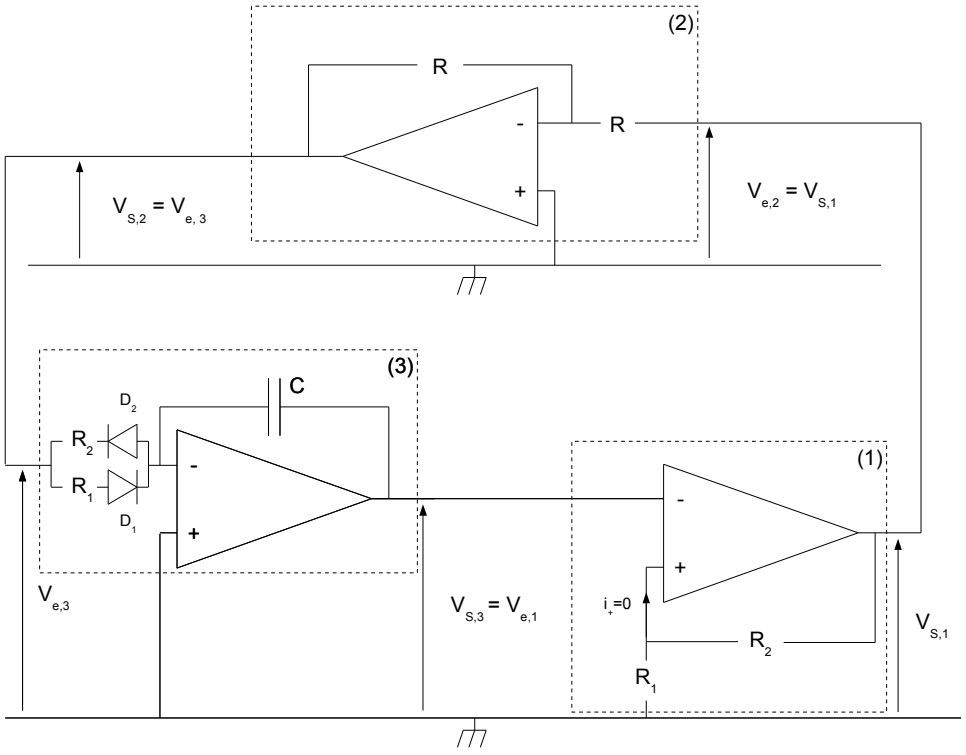

FIGURE 82 – Générateur de triangles avec montage potentiométrique

Sur un front montant, la sortie du trigger est positive, donc celle de l'inverseur est négative : la diode D_2 est passante et la diode D_1 non passante. On peut donc se ramener au cas précédent avec $\tau = \tau_2 = R_2C$.

De même, sur un front descendant, la sortie est positive donc la diode D_1 est passante et la diode D_2 non passante. Le montage est équivalent à celui considéré précédemment, avec $\tau = \tau_1 = R_1C$.

Le rapport cyclique vaut alors :

$$\eta = \frac{\tau_2}{\tau_1} \tag{217}$$

Trigger de Schmitt affiné Considérons un trigger de Schmitt où la résistance reliée à la patte + a été remplacée par un générateur de tension réel (E, R) (figure 83).

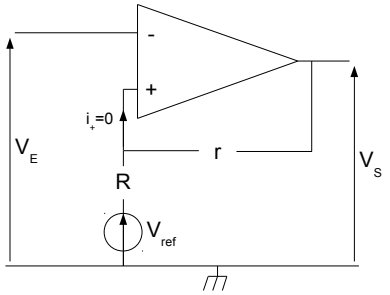

FIGURE 83 – Trigger de Schmitt affiné

On pose $a = \frac{R}{R+r}$. Le niveau de basculement haut V_H correspond à $\epsilon = 0$ et $v_S = +V_{sat}$. Par application du théorème de Millman en A, il vient :

$$V_H = \frac{\frac{E}{R} + \frac{v_S}{r} + i_+}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r}} = \frac{r}{R+r}E + \frac{R}{R+r}v_{sat} = av_{sat} + (1-a)\,E \tag{218}$$

De même, en remplaçant v_{sat} par $-v_{sat}$, on obtient le niveau de basculement bas :

$$V_B = -av_{sat} + (1-a)\,E \tag{219}$$

Ceci correspond à la caractéristique tension de sortie en fonction de la tension d'entrée donnée en figure 84.

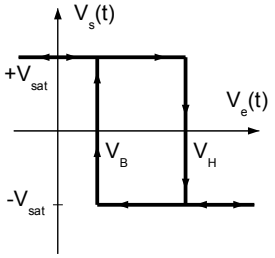

FIGURE 84 – Caractéristique tension de sortie en fonction de la tension d'entrée du trigger de Schmitt affiné

La modification apportée au trigger de Schmitt permet d'avoir des seuils de basculement qui ne sont pas nécessairement opposés.

4 Énergie et puissance

4.1 Définitions générales

Puissance instantanée La puissance instantanée reçue par un dipôle vaut, avec i l'intensité du courant traversant ce dipôle et u la tension aux bornes de ce dipôle en convention récepteur :

$$P(t) = u(t)\, i(t) \tag{220}$$

Cette puissance s'exprime en watts, avec u en volts et i en ampères.

Énergie L'énergie reçue par un dipôle entre t_1 et t_2 vaut, avec p la puissance instantanée :

$$E(t) = \int_{T_1}^{t_2} p(t)dt \tag{221}$$

Valeurs usuelles L'expression de la puissance instantanée et de l'énergie est supposée connue pour certains composants de base.

Résistance On a :

$$P_R(t) = Ri^2(t) \tag{222}$$

$$E_R(t) = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\, dt \tag{223}$$

Condensateur On a :

$$P_C(t) = uC\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu(t)^2\right) \tag{224}$$

$$E_C(t) = \left(\frac{1}{2}Cu(t_2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}Cu(t_1)^2\right) \tag{225}$$

Bobine On a :

$$P_L(t) = iL\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li(t)^2\right) \tag{226}$$

$$E_L(t) = \left(\frac{1}{2}Li(t_2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}Li(t_1)^2\right) \tag{227}$$

4.2 Puissance en régime sinusoïdal forcé

Puissance moyenne Lorsqu'un système électronique est excité par une tension périodique de période T, on définit la puissance moyenne par :

$$\underline{P}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, i(t)\, dt \tag{228}$$

Cette puissance moyenne est nulle pour les bobines et les condensateurs, d'après les équations 224 et 226.

Application aux excitations sinusoïdales Pour une excitation sinusoïdale, on a :

$$u(t) = U_{max}\cos(\omega t + \phi_u) \tag{229}$$

$$i(t) = I_{max}\cos(\omega t + \phi_i) \tag{230}$$

On note alors :

$$\phi = \phi_u - \phi_i \tag{231}$$

$$\psi = \phi_i - \phi_u \tag{232}$$

On peut alors calculer $\underline{P}$ par application de la formule de l'équation 228 :

$$\underline{P}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,i(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_{max}I_{max}\cos(\omega t+\phi_u)\cos(\omega t+\phi_i)\,dt \tag{233}$$

L'application d'une formule de Simpson donne :

$$\underline{P}(t) = \frac{U_{max}I_{max}}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t+\phi_u+\phi_i)+\cos(\phi_u-\phi_i)\,dt \tag{234}$$

Exploitons la linéarité de l'intégrale. Nous obtenons :

$$\underline{P}(t) = \frac{U_{max}I_{max}}{2T}\left(\int_0^T \cos(2\omega t+\phi_u+\phi_i)\,dt + \int_0^T \cos(\phi_u-\phi_i)\,dt\right) \tag{235}$$

Faisons à présent apparaître une valeur moyenne à la place de la première intégrale, et calculons la seconde. Il vient :

$$\underline{P}(t) = \frac{U_{max}I_{max}}{2T}\left(T\langle\cos(2\omega t+\phi_u+\phi_i)\rangle + T\cos(\phi)\right) \tag{236}$$

La valeur moyenne du cosinus est nulle, et nous pouvons simplifier par T. Nous obtenons *in fine* :

$$\underline{P}(t) = \frac{U_{max}I_{max}}{2}\cos(\phi) \tag{237}$$

Courant efficace, tension efficace On appelle courant efficace I_{eff} pour une tension périodique le courant continu qui apporte pendant une durée T la même énergie que le courant périodique i dans une résistance R. On a donc :

$$RI_{eff}^2 = Ri^2(t) \tag{238}$$

En intégrant, nous obtenons :

$$\int_0^T RI_{eff}^2 dt = \int_0^T Ri^2(t)\,dt \tag{239}$$

L'intégrale du membre de gauche se calcule aisément ; il vient :

$$RI_{eff}^2 T = \int_0^T Ri^2(t)\,dt \tag{240}$$

On obtient donc :

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{RT}\int_0^T Ri^2(t)\,dt} \tag{241}$$

Ceci peut se récrire :

$$I_{eff} = \sqrt{\langle i^2(t)\rangle} \tag{242}$$

De manière analogue, on définit la tension efficace par :

$$U_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t)\rangle} \tag{243}$$

En régime sinusoïdal, on a :

$$I_{eff} = \sqrt{\langle I_{max}^2\cos^2(\omega t+\phi_i)\rangle} = I_{max}\sqrt{\langle\cos^2(\omega t+\phi_i)\rangle} \tag{244}$$

La valeur moyenne du cosinus élevé au carré vaut $\frac{1}{2}$, on obtient donc :

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \tag{245}$$

De manière analogue, en régime sinusoïdal, on a :

$$U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \tag{246}$$

On obtient donc en régime sinusoïdal la formule :

$$\underline{P}(t) = U_{eff}I_{eff}\cos(\phi) \tag{247}$$

4.3 Adaptation d'impédances

On considère le circuit de la figure 85, où z_G correspond à l'impédance du générateur et z à l'impédance de la charge.

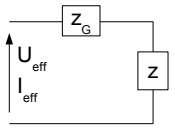

FIGURE 85 – Situation pour l'adaptation d'impédances

On note :

$$z = X + jY \tag{248}$$

$$z_G = X_G + jY_G \tag{249}$$

On cherche à ce que la puissance moyenne P_Z consommée dans Z soit maximum, en faisant varier X et Y. Comme la puissance est consommée dans la partie réelle (résistive) d'un dipôle, on a :

$$P_Z = XI_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{X} \tag{250}$$

On a :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{z_G + z} = \frac{\underline{u}}{X + X_G + j\left(Y + Y_G\right)} \tag{251}$$

Par ailleurs, on a :

$$I_{eff} = \frac{|\underline{i}|}{\sqrt{2}} \tag{252}$$

$$U_{eff} = \frac{|\underline{u}|}{\sqrt{2}} \tag{253}$$

On en déduit que :

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{\left(X + X_G\right)^2 + \left(Y + Y_G\right)^2}} \tag{254}$$

Soit :

$$P_Z = \frac{XU_{eff}^2}{\left(X + X_G\right)^2 + \left(Y + Y_G\right)^2} \tag{255}$$

Fixons X. Pour que P_Z soit maximum, il faut et il suffit que $\left(X + X_G\right)^2 + \left(Y + Y_G\right)^2$ soit minimum (car il est positif), c'est-à-dire que $Y + Y_G = 0$. On a donc :

$$Y = -Y_G \tag{256}$$

Posons $Y = -Y_G$. Pour que P_Z soit maximum, il faut et il suffit que $\ln\left(P_Z\right)$ soit maximum (car P_Z est positif, et car le logarithme népérien est une fonction strictement croissante). On a :

$$\ln\left(P_Z\right) = \ln\left(X\right) + 2\ln\left(U_{eff}\right) - 2\ln\left(X + X_G\right) \tag{257}$$

Le maximum correspond à la valeur de X qui annule $\frac{d\ln\left(P_Z\right)}{dX}$. On a :

$$\frac{d\ln\left(P_Z\right)}{dX} = \frac{1}{X} - \frac{2}{X + X_G} \tag{258}$$

On a donc :

$$\frac{1}{X} = \frac{2}{X + X_G} \tag{259}$$

Soit, après calcul :

$$X = X_G \tag{260}$$

D'après les équations 256 et 260, on conclut que P_Z est maximum si et seulement si :

$$z = z_G^* \tag{261}$$

On dit alors que l'on a adaptation d'impédances.